Relativité Générale et Cosmologie

— Une introduction —

Nathalie Deruelle

Institut d'Astrophysique de Paris,
GReCO, FRE 2435 du CNRS,
98 bis boulevard Arago, 75014, Paris, France

Ecole de Gif, Strasbourg, Septembre 2002

Résumé

Dans ce cours, nous retraçons les étapes qui mènent des équations de Newton de la gravitation aux équations d'Einstein de la relativité générale. Nous faisons ensuite une brève revue de la géométrie du modèle cosmologique standard. Nous concluons par une introduction aux modèles d'inflation.

I. Fondements géométriques de la relativité générale

1. Rappels de géométrie et gravitation newtoniennes

a. Espace et temps absolus, invariance de Galilée

• *Espace et temps absolus*

En physique newtonienne espace et lieux réels sont représentés pas un ensemble de points p, $\{p\} = \mathcal{E}_3$, l'*espace absolu*. $\mathcal{E}_3$ est postulé euclidien, ce qui implique que les points p peuvent être distingués par des coordonnées cartésiennes X^α ($\alpha = 1, 2, 3$). La distance, ou *élément de longueur*, dl entre deux points infiniment voisins de coordonnées X^α et $X^\alpha + dX^\alpha$ est alors donnée par le "théorème de Pythagore"

$$dl^2 = (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2 = \sum_{\alpha,\beta} \delta_{\alpha\beta}\, dX^\alpha dX^\beta \equiv \delta_{\alpha\beta}\, dX^\alpha dX^\beta \qquad (1.1.1)$$

où $\delta_{\alpha\beta}$ est le symbole de Kronecker et où la deuxième égalité définit la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés. Le *repère absolu*, $\mathcal{S}$, est l'ensemble du point origine $(0, 0, 0)$ et des trois axes orthornormés $(\{X^1\}, 0, 0)$, etc...

Comme la distance est postulée ne pas dépendre de l'étiquetage des points, on a que, dans les transformations $\mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ définies par

$$X'^\alpha = \Lambda_\beta{}^\alpha X^\beta - b'^\alpha \quad \text{avec} \quad \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta \delta_{\alpha\beta} = \delta_{\mu\nu} \qquad (1.1.2)$$

(qui forment un groupe à six paramètres, trois de translation et trois de rotation), l'élément de longueur et sa forme reste inchangés : $dl^2 = \delta_{\alpha\beta}\, dX'^\alpha dX'^\beta$, de sorte que $\mathcal{S}'$ est également un repère cartésien.

Le temps physique est représenté par un nombre réel t, le *temps absolu*. C'est un paramètre attaché à p qui croît de la même façon pour tous les points. Les coordonnées de p dans $\mathcal{S}$ ne dépendent pas de t. Les points de $\mathcal{E}_3$ sont donc, par construction, au repos.

• *Référentiel absolu*

Le repère absolu est matérialisé par un *référentiel absolu*, construit par approximations successives, par le fait que les lois de la dynamique y sont vérifiées. Ainsi, en première approximation, les "murs du laboratoire" peuvent matérialiser $\mathcal{S}$. Pour Newton le référentiel absolu était formé du centre de masse du système solaire et de trois axes orthonormés pointant vers trois étoiles supposées fixes. Quant au temps absolu il est matérialisé par des horloges, mouvements répétitifs que l'on suppose périodiques ; là encore une bonne horloge est construite par approximations successives.

• *Cinématique*

La trajectoire dans le référentiel absolu d'un point matériel P est représentée par les trois fonctions du temps $X^\alpha = x^\alpha_\mathcal{S}(t)$. Sa vitesse et son accélération dans $\mathcal{S}$ sont définies par $v^\alpha_\mathcal{S} \equiv \frac{dx^\alpha_\mathcal{S}}{dt} \equiv \dot{x}^\alpha_\mathcal{S}$ et $a^\alpha_\mathcal{S} \equiv \dot{v}^\alpha_\mathcal{S}$.

On peut déjà à ce stade faire une prédiction, élémentaire mais importante car elle s'avèrera démentie par l'expérience... : soit P un observateur immobile dans $\mathcal{S}$ en O ; soit un voyageur P' qui, parti de O, y retourne après un quelconque périple ; sa montre, synchronisée avec celle de O au départ doit indiquer la même heure à l'arrivée...

Dans le changement de repère cartésien (1.1.2) les équations de la trajectoire de P deviennent $X'^\alpha = \Lambda_\beta{}^\alpha x^\beta_\mathcal{S}(t) - b'^\alpha \equiv x^\alpha_{\mathcal{S}'}(t)$, de sorte que ses vitesse et accélération dans $\mathcal{S}'$ sont

$$v^\alpha_{\mathcal{S}'} \equiv \frac{dx^\alpha_{\mathcal{S}'}}{dt} = \Lambda_\beta{}^\alpha v^\beta_\mathcal{S} \quad , \quad a^\alpha_{\mathcal{S}'} \equiv \frac{dv^\alpha_{\mathcal{S}'}}{dt} = \Lambda_\beta{}^\alpha a^\beta_\mathcal{S}. \tag{1.1.3}$$

On peut ainsi considérer $v^\alpha_\mathcal{S}$ et $v^\alpha_{\mathcal{S}'}$ comme les avatars, dans deux repères différents du groupe des translations et rotations, du même objet intrinsèque (vectoriel), la vitesse v de P. Il en est de même pour l'accélération. Ainsi le repère cartésien $\mathcal{S}'$ est équivalent, du point de vue cinématique, au repère absolu $\mathcal{S}$.

Le groupe des *déplacements rigides* $\mathcal{S} \to \mathcal{S}_t$ est, lui, défini par

$$X'^\alpha = \Lambda_\beta{}^\alpha(t)\, X^\beta - b'^\alpha(t) \quad \text{avec} \quad \Lambda_\mu{}^\alpha(t)\, \Lambda_\nu{}^\beta(t)\, \delta_{\alpha\beta} = \delta_{\mu\nu}. \tag{1.1.4}$$

La forme de l'élément de longueur y reste inchangée mais, dans $\mathcal{S}_t$, les coordonnées (cartésiennes) X'^α des points p de $\mathcal{E}_3$ dépendent du temps. Les lois de transformation de la vitesse et de l'accélération de P deviennent

$$\begin{aligned} v^\alpha_{\mathcal{S}_t} &\equiv \frac{dx^\alpha_{\mathcal{S}_t}}{dt} = \Lambda_\beta{}^\alpha\, v^\beta_\mathcal{S} + \dot\Lambda_\beta{}^\alpha x^\beta_\mathcal{S} - \dot b'^\alpha \\ a^\alpha_{\mathcal{S}_t} &\equiv \frac{dv^\alpha_{\mathcal{S}_t}}{dt} = \Lambda_\beta{}^\alpha\, a^\beta_\mathcal{S} + 2\dot\Lambda_\beta{}^\alpha\, v^\beta_\mathcal{S} + \ddot\Lambda_\beta{}^\alpha\, x^\beta_\mathcal{S} - \ddot b'^\alpha \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

soit encore, sous forme vectorielle

$$\begin{aligned} v_{\mathcal{S}_t} &= v_\mathcal{S} - \Omega \times r_{\mathcal{S}_t} - \dot b \\ a_{\mathcal{S}_t} &= a_\mathcal{S} - 2\Omega \times v_{\mathcal{S}_t} + \Omega \times (r_{\mathcal{S}_t} \times \Omega) - \dot\Omega \times r_{\mathcal{S}_t} - \ddot b \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

où $r_{\mathcal{S}_t}$ est le rayon vecteur de $p(t)$ dans $\mathcal{S}_t$ et Ω le vecteur de rotation de $\mathcal{S}_t$ par rapport à $\mathcal{S}$. On voit que ce n'est que sous les transformations de Galilée $\mathcal{S} \to \mathcal{S}_g$ définies par

$$\dot\Lambda_\beta{}^\alpha(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Omega = 0 \qquad , \qquad \ddot b'^\alpha(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ddot b = 0 \tag{1.1.7}$$

que l'accélération reste un vecteur intrinsèque, i.e. se transforme comme en (1.1.3), et donc que

$$a_{\mathcal{S}_g} = a_\mathcal{S} \equiv a. \tag{1.1.8}$$

La vitesse, quant à elle n'est jamais un vecteur intrinsèque dans les changements de repère dépendant du temps. Dans les transformations de Galilée : $v_{\mathcal{S}_t} = v_\mathcal{S} - \dot b$. Les repères $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_t$ ne sont donc pas équivalents du point de vue cinématique.

• *Dynamique et invariance galiléenne*

La loi de Newton du mouvement dans $\mathcal{S}$ d'un point matériel P est

$$m^{(i)}\, a_{\mathcal{S}} = F_{\mathcal{S}} \tag{1.1.9}$$

où la masse inertielle $m^{(i)}$ mesure la résistance du point à la "force" $F_{\mathcal{S}}$ (qui doit être précisée).

Si $F_{\mathcal{S}} = 0$, la particule est libre et son accélération est nulle dans *tout* repère galiléen. Si la force est un vecteur intrinsèque dans les transformations de Galilée, alors la loi du mouvement s'écrit

$$m^{(i)} a = F \tag{1.1.10}$$

dans tout repère galiléen et il impossible de déterminer le référentiel absolu à mieux d'une translation uniforme près ; comme les forces mécaniques (la force de gravitation par exemple) s'avèrent être des vecteurs intrinsèques sous le groupe de Galilée, la physique newtonienne a érigé ce résultat en "principe" : le *principe de relativité.*

En revanche, dans un référentiel accéléré, une particule libre possède une accélération *d'inertie* donnée par (1.1.6) ; elle n'a pas un mouvement de translation uniforme, ce qui permet de déterminer l'accélération absolue du repère par rapport à l'ensemble des repères galiléens. C'est ce que montrent les expériences du "seau de Newton" ou du pendule de Foucault, qui ne laissèrent pas d'étonner Newton lui-même, puis Leibniz, Kant, Mach, Poincaré, Einstein,...

b. Coordonnées curvilignes et dérivation covariante

• *Coordonnées curvilignes*

Jusqu'à présent nous n'avons considéré que des coordonnées cartésiennes pour lesquelles l'élément de longueur garde sa forme "pythagoricienne". On peut vouloir étiqueter les points p de $\mathcal{E}_3$ par d'autres coordonnées x^α, *curvilignes* (dites aussi *gaussiennes*), reliées par des relations non-linéaires aux coordonnées cartésiennes X^α : $x^\alpha = x^\alpha(X^\beta)$. Dans ce changement de coordonnées $\mathcal{S} \to \mathcal{C}$, l'élément de longueur devient

$$dl^2 = \delta_{\alpha\beta}\, dX^\alpha dX^\beta = e_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu\,, \quad \text{où} \quad e_{\mu\nu} \equiv \delta_{\alpha\beta}\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu} \tag{1.1.11}$$

sont les composantes dans $\mathcal{C}$ d'un objet intrinsèque, noté e, le *tenseur métrique* euclidien, dont les composantes dans $\mathcal{S}$ sont $\delta_{\alpha\beta}$ et les composantes dans $\mathcal{C}$ sont $e_{\mu\nu}$. On définit l'inverse du tenseur métrique par $e^{\mu\rho}$ tel que $e^{\mu\rho}e_{\nu\rho} = \delta^\mu_\nu$. Si les coordonnées x^μ sont les coordonnées sphériques par exemple ($x = r\sin\theta\cos\phi$, etc...) on trouve pour l'élément de longueur la forme familière : $dl^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$.

• *Dynamique*

Si la trajectoire de P dans $\mathcal{S}$ est donnée par $X^\alpha = x^\alpha_{\mathcal{S}}(t)$, elle est donnée dans $\mathcal{C}$ par $x^\alpha = x^\alpha(x^\beta_{\mathcal{S}}(t)) \equiv x^\alpha_{\mathcal{C}}(t)$ et ses vitesse et accélération dans $\mathcal{C}$ sont

$$\begin{aligned} v^\alpha_{\mathcal{C}} &\equiv \frac{dx^\alpha_{\mathcal{C}}}{dt} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial X^\beta}\, v^\beta_{\mathcal{S}} \\ a^\alpha_{\mathcal{C}} &\equiv \frac{dv^\alpha_{\mathcal{C}}}{dt} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial X^\beta}\, a^\beta_{\mathcal{S}} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial X^\beta \partial X^\gamma}\, v^\beta_{\mathcal{S}} v^\gamma_{\mathcal{S}} \end{aligned} \tag{1.1.12}$$

et l'on voit que si l'on peut définir une vitesse intrinsèque, dont les avatars dans différents systèmes de coordonnées sont reliés les uns aux autres par les mêmes formules que dans le cas des coordonnées cartésiennes, il n'en est pas de même en général de l'accélération. Ainsi la loi de la dynamique (1.1.9) s'écrit, dans un système de coordonnées curvilignes

$$a^\alpha_{\mathcal{C}} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial X^\delta}\frac{\partial^2 X^\delta}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} v^\beta_{\mathcal{C}} v^\gamma_{\mathcal{C}} = \frac{1}{m^{(i)}}\frac{\partial x^\alpha}{\partial X^\beta} F^\beta_{\mathcal{S}} \tag{1.1.13}$$

où l'on a utilisé le fait que $\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\epsilon}\frac{\partial x^\alpha}{\partial X^\beta} = \delta^\alpha_\epsilon$. La force exercée sur P ne dépendant pas de l'étiquetage des points, le membre de droite de cette équation est l'avatar dans le système $\mathcal{C}$ d'un vecteur intrinsèque, $F/m^{(i)}$. Il en est donc de même du membre de gauche, qui définit les composantes dans $\mathcal{C}$ de la *dérivée covariante* de la vitesse de P. On écrit, en posant $F^\alpha_{\mathcal{C}} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial X^\beta} F^\beta_{\mathcal{S}}$ et en supprimant les indices $\mathcal{C}$

$$\frac{Dv^\alpha}{dt} = \frac{1}{m^{(i)}} F^\alpha \quad \text{avec} \quad \frac{Dv^\alpha}{dt} = \frac{dv^\alpha}{dt} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} v^\beta v^\gamma \quad \text{et} \quad \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial X^\delta}\frac{\partial^2 X^\delta}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}. \tag{1.1.14}$$

Sous forme vectorielle cette équation s'écrit

$$D_v v = \frac{1}{m^{(i)}} F\,. \tag{1.1.15}$$

Enfin on montre, à l'aide de (1.1.11), que les *symboles de Christoffel* $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ s'écrivent aussi

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} e^{\alpha\delta}\left(\frac{\partial e_{\gamma\delta}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial e_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial e_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta}\right). \tag{1.1.16}$$

N.B. : On peut trouver l'expression de la dérivée covariante directement en fonction des symboles de Christoffel (1.1.16) en variant le lagrangien du point P

$$L(x^\alpha_{\mathcal{C}}, v^\alpha_{\mathcal{C}}) = \frac{1}{2} m^{(i)} e_{\alpha\beta} v^\alpha_{\mathcal{C}} v^\beta_{\mathcal{C}} - V(x^\alpha_{\mathcal{C}}) \tag{1.1.17}$$

où $V(x^\alpha)$ est le potentiel auquel est soumis P. La force est alors un gradient

$$F = -\nabla V \quad \text{de composantes} \quad F^\alpha = -e^{\alpha\beta}\frac{\partial V}{\partial x^\beta} \quad \text{dans } \mathcal{C}\,. \tag{1.1.18}$$

• *Terminologie tensorielle*

Dans le changement de système de coordonnées curvilignes $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, v^α sont les composantes d'un vecteur intrinsèque ou *tenseur une fois contravariant*, v, si elles se transforment selon $v^\alpha_{\mathcal{C}} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} v^\beta_{\mathcal{C}'}$. Le tenseur métrique, e, de composantes $e_{\alpha\beta}$ dans un système $\mathcal{C}$ est un exemple de tenseur *deux fois covariant*. La dérivée covariante $D_\alpha v^\beta \equiv \frac{Dv^\beta}{dx^\alpha}$ d'un champ de vecteur $v^\beta(x^\gamma)$ est un tenseur *une fois contravariant et une fois covariant*. Enfin, en notant que les dérivées ordinaire et covariante d'un *scalaire* (objet dont les composantes sont les mêmes dans tout système) sont identiques on obtient l'expression de la dérivée covariante de tout tenseur ; ainsi par exemple

$$D_\alpha T^\beta_\gamma = \frac{\partial T^\beta_\gamma}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\beta_{\alpha\mu} T^\mu_\gamma - \Gamma^\mu_{\alpha\gamma} T^\beta_\mu \,. \tag{1.1.19}$$

c. Force et champ de gravitation

• *Loi de Newton*

La force de gravitation exercée sur un point matériel P en $p(t)$ par des points matériels P_a en $p_a(t)$ est

$$F = -m \sum_a G\, m_a \frac{l_a}{R_a^3} \tag{1.1.20}$$

où G est la *constante de Newton*, où m et m_a sont les *masses graves* de P et P_a, où les composantes du vecteur intrinsèque l_a sont

$$l^\alpha_{a\mathcal{S}} = x^\alpha_{\mathcal{S}}(t) - x^\alpha_{a\mathcal{S}}(t) \quad , \quad l^\alpha_{a\mathcal{S}_t} = \Lambda_\beta{}^\alpha(t) l^\beta_{a\mathcal{S}} \quad , \quad l^\alpha_{a\mathcal{C}} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial X^\beta} l^\beta_{a\mathcal{S}} \tag{1.1.21}$$

dans, respectivement, le repère absolu $\mathcal{S}$, un repère $\mathcal{S}_t$ déduit de $\mathcal{S}$ par déplacement rigide, et un système de coordonnées curvilignes $\mathcal{C}$. Enfin le scalaire R_a est la distance entre P et P_a, dont l'expression explicite est

$$R_a = \sqrt{\delta_{\alpha\beta} l^\alpha_{a\mathcal{S}} l^\beta_{a\mathcal{S}}} = \sqrt{\delta_{\alpha\beta} l^\alpha_{a\mathcal{S}_t} l^\beta_{a\mathcal{S}_t}} = \sqrt{e_{\alpha\beta} l^\alpha_{a\mathcal{C}} l^\beta_{a\mathcal{C}}} \,. \tag{1.1.22}$$

Cette force dérive d'un potentiel (défini à une fonction arbitraire du temps près)

$$F = -m\nabla U \quad \text{avec} \quad U = -\sum_a G \frac{m_a}{R_a} \tag{1.1.23}$$

de sorte que l'équation du mouvement de P s'écrit

$$\begin{cases} m^{(i)}\, a = -m\nabla U \\ m^{(i)}\, D_v v = -m\nabla U \\ m^{(i)}\, a_{\mathcal{S}_t} = -m\nabla U + m^{(i)}(-2\Omega \times v_{\mathcal{S}_t} + \Omega \times (r_{\mathcal{S}_t} \times \Omega) - \dot{\Omega} \times r_{\mathcal{S}_t} - \ddot{b}) \end{cases} \tag{1.1.24}$$

dans, respectivement, tout repère galiléen, tout système de coordonnées curvilignes en repère galiléen, et en repère accéléré par rapport aux repères galiléens.

• *Egalité masse grave-masse inerte*

C'est un fait expérimental connu depuis Galilée, et vérifé actuellement à mieux de 10^{-12} près, que tous les corps graves tombent de la même façon dans un champ de gravitation, ce qui signifie que masses grave et inerte sont proportionnelles. Elles peuvent être égalées par choix d'unités (qui détermine $G \approx 6.6726 \times 10^{-11} m^3/kg/sec^2$) :

$$m^{(i)} = m \,. \tag{1.1.25}$$

Or le mouvement d'une particule libre dans un repère accéléré est aussi indépendant de sa masse. Cette "équivalence" entre forces de gravitation et d'inertie fondera la relativité générale.

• *Remarques*

Les "failles" de l'équation (1.1.24) furent dénoncées par Newton lui-même et ses contemporains (Leibniz en particulier) :

– L'interaction gravitationnelle entre deux corps se propage instantanément (mystère à l'origine du célèbre "hypotheses non fingo").

– Elle est à longue portée, toujours attractive, et donc seules des particules infiniment distantes les unes des autres y échappent ; il n'y a donc pas de particules (massives) vraiment libres ; or la construction des référentiels inertiels *repose* sur la notion de particule libre.

– L'accélération est définie par rapport à l'origine du repère, point sans signification physique ; on peut suivre Leibniz et écrire, à partir des N équations du mouvement de N corps, $(N-1)$ équations ne faisant intervenir que leurs positions relatives ; et l'on constate que ces équations sont invariantes sous un groupe plus large que celui de Galilée, le *groupe de Milne* : $\Omega = 0$ et $b(t)$ *quelconque.*

La relativité générale répondra à ces objections : la vitesse de propagation de l'interaction gravitationnelle y sera finie (égale à celle de la lumière) et les repères galiléens perdront leur statut privilégié.

Les "triomphes" des lois de Newton sont cependant légion, le plus important étant bien sûr l'explication des lois de Kepler et du mouvement des planètes. Seule une avance de 43" d'arc par siècle du périhélie de Mercure restera inexpliquée jusqu'à l'avènement de la relativité générale.

Notons aussi une "curiosité" newtonienne :

– La vitesse de libération d'un corps de masse M et de rayon R_0 est $v_l = \sqrt{\frac{2GM}{R_0}}$. Comme le remarquèrent au 18ème siècle Michell puis Laplace, la lumière, considérée comme un corpuscule massif ayant la vitesse c en R_0, ne peut donc se libérer d'une étoile de rayon inférieur à $R_S = \frac{2GM}{c^2}$. Une telle étoile est "noire". (Pour $M = M_\odot$, la masse du soleil, $R_S \approx 3$ km)

– On trouve de même (Soldner, 1801) qu'un corpuscule lumineux ayant une trajectoire hyperbolique tangente à une étoile de rayon R_0, est défléchie d'un angle $\Delta\phi \simeq \frac{2GM}{c^2 R_0}$. (Pour le soleil, $R_\odot \approx 7 \times 10^6$ km et $\Delta\phi \approx 0.79$".)

Ceci étant, on ne sait dans le cadre newtonien décrire l'interaction d'une *onde* lumineuse et de la gravitation et, par défaut, on supposa qu'elle se propageait en ligne droite, à vitesse constante c dans le référentiel absolu de Newton. La relativité générale fournira une théorie complète et permettra d'interpréter R_S comme le "rayon de Schwarzschild" d'un "trou noir" ; elle prédira aussi une déviation de la lumière par les corps graves, mais d'une valeur double de la valeur newtonienne.

• *Extension aux milieux continus*

Lorsque les particules produisant et subissant leur interaction gravitationnelle réciproque forment un ensemble dense on les décrit (on se placera ici en repère inertiel) comme un fluide de densité de masse $\rho(x^\alpha, t)$, de champ de vitesse $v(x^\alpha, t)$ et leurs interactions (collisionnelles) autres que gravitationnelles sont décrites phénoménologiquement par une pression $p(x^\alpha, t)$.

Si l'on suppose que la masse se conserve on a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho v) = 0\,. \tag{1.1.26}$$

Quant à l'équation de Newton ($a = -\nabla U$) elle devient celle d'Euler

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v.\nabla)v = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla U \tag{1.1.27}$$

à laquelle il convient d'ajouter une équation d'état : $p = p(\rho)$.

Pour obtenir un système fermé d'équations, il faut relier U à ρ. A partir de l'expression (1.1.23) du potentiel, on peut prendre

$$U(x) = -G \int d^3V' \, \frac{\rho(x', t)}{R_{xx'}} \tag{1.1.28}$$

où l'élément de volume est $d^3V \equiv \sqrt{e}\, d^3x = \sqrt{e}\, dx^1 dx^2 dx^3$, e étant le déterminant des composantes $e_{\alpha\beta}$ de la métrique (et le jacobien de la transformation des coordonnées cartésiennes aux coordonnées quelconques x^α). C'est à partir de l'expression (1.1.28) du potentiel que Newton put démontrer que la force de gravitation exercée par un corps sphérique est la même que celle exercée par une particule de même masse située en son centre (cette démonstration du "théorème de Gauss", qui nécessita l'invention–avec Leibniz–du calcul intégral, lui prit 25 ans et retarda d'autant la publication des *Principia*).

On note que si ρ ne dépend que du temps (cas d'une distribution homogène dans tout l'espace) alors U diverge.

Laplace puis Poisson, quant à eux, fermèrent le système en trouvant l'équation différentielle que satisfait U, à savoir

$$\Delta U = 4\pi G \rho \tag{1.1.29}$$

où le laplacien de U est donné dans tout système de coordonnées curvilignes par $\Delta U \equiv e^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta U = \frac{1}{\sqrt{e}}\partial_\alpha(\sqrt{e} e^{\alpha\beta}\partial_\beta U)$. Ce faisant, il mirent la théorie de Newton sous forme de "théorie des champs".

Il importe de noter que l'équation (1.1.29) admet d'autres solutions que (1.1.28) (qui, elle, incorpore une condition aux limites). Ainsi, si ρ ne dépend que du temps, la solution convergente en $r = 0$ de (1.1.29) est (à une fonction du temps arbitraire près) : $U = \frac{2}{3}\pi G \rho(t)\, r^2$.

2. Cosmologie newtonienne

• *Remarques d'histoire*

Le premier à avoir fait éclater le monde sphérique grec pour passer "du monde clos à l'univers infini" (Koyré) semble avoir été Thomas Digges en 1576. Kepler en 1610 écrivait à Galilée que “cette pensée porte en elle je ne sais quelle horreur secrète” (car l'univers alors n'a plus de centre). C'est aussi Kepler qui mit le premier le doigt sur le “paradoxe de Olbers”, à savoir que dans un univers infini peuplé uniformément d'étoiles lumineuses immobiles, la nuit ne devrait pas être noire.

Newton, en tenant un raisonnement similaire, remarqua que dans un tel univers les forces de gravitation sur une étoile donnée s'annullent deux à deux et que donc la gravitation, paradoxalement, est effacée. Par ailleurs le “théorème de Gauss” ne s'applique pas à une distribution uniforme de matière (cf plus haut). Enfin, le système n'est pas stable. Le seul échappatoire est de décrire l'univers comme une “île”, de durée de vie finie, en translation uniforme dans le référentiel (immatérialisable) absolu : “absurde !” disait Leibniz.

Cependant on peut construire une cosmologie newtonienne plus satisfaisante en utilisant l'équation, locale, de Poisson. Curieusement, cette cosmologie newtonienne ne fut développée qu'après l'avénement de la relativité générale, dans les années 1930, par Milne et Mac Crea.

• *L'équation de “Friedmann”*

Rassemblons les équations qui gouvernent, en repère inertiel, le “fluide cosmologique” newtonien :

$$\Delta U = 4\pi G\rho \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial t} + (v.\nabla)v = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla U \quad , \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho v) = 0 \tag{1.2.1}$$

auxquelles il faut ajouter une équation d'état, $p = p(\rho)$.

On cherche une solution de la forme : $\rho = \rho(t), p = p(t)$ (qui traduit l'homogénéité supposée de la matière dans tout l'univers), et $v = H(t)r$, où r est le rayon vecteur de l'origine à la “galaxie” considérée, qui traduit l'isotropie (par rapport à *tous* les points) de la distribution. Pour $H > 0$ la distribution de matière est en expansion, les galaxies s'éloignant toutes les unes des autres avec une vitesse proportionnelle à leur distance.

On connaît alors la solution de l'équation de Poisson : $U = \frac{2}{3}\pi G\rho(t)\, r^2$. L'équation de continuité donne, elle, en posant $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$, $a(t)$ étant appelé le *facteur d'échelle* :

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{a^3} \tag{1.2.2}$$

où ρ_0 est une constante d'intégration. Enfin l'équation d'Euler donne l'équation de “Friedmann” (entre guillements car elle fut découverte en 1922 par Friedmann dans le contexte de la relativité générale) :

$$H^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{1.2.3}$$

où K est une constante d'intégration.

Dans le cas où $K = 0$ les équations s'intègrent très simplement

$$a \propto t^{2/3} \quad , \quad H = \frac{2}{3t} \quad , \quad \rho \propto \frac{1}{t^2} \,. \tag{1.2.4}$$

Dans le cadre de la relativité générale cette solution prendra le nom d'"Einstein-de Sitter".

• *Perturbations*

Pour décrire l'évolution des perturbations on linéarise les équations (1.2.1) autour de la solution de "fond" ci-dessus. En introduisant le contraste de densité $\delta \equiv \frac{\rho_1}{\rho}$, où ρ_1 est la perturbation, on trouve par exemple l'équation suivante pour l'évolution de son mode de Fourier δ_k

$$\ddot{\delta}_k + 2H\dot{\delta}_k + \left(\frac{k^2 v_s^2}{a^2} - 4\pi G\rho\right)\delta_k = 0 \tag{1.2.5}$$

où v_s est la "vitesse du son", la perturbation de la pression étant supposée "adiabiatique", c.-à-d. telle que $p_1 = v_s^2 \rho_1$. Dans le cas $K = 0$, la solution est la somme de deux modes, l'un décroissant, l'autre croissant comme le facteur d'échelle

$$\delta_k \propto \frac{1}{t} \quad \text{et} \quad \delta_k \propto t^{2/3}\,, \tag{1.2.6}$$

pour tous les modes tels que $\frac{k^2 v_s^2}{a^2} \ll \frac{3H^2}{2}$ (i.e. pour tous k si la pression est nulle).

Ainsi les perturbations de taille $L \propto 1/k$ suffisamment grandes croissent dans un univers en expansion et ce mécanisme d'instabilité gravitationnelle peut éventuellement expliquer la formation des grandes structures observées (les galaxies elles-mêmes et leurs amas).

• *Les limitations de la cosmologie newtonienne*

Dans le modèle cosmologique obtenu ci-dessus, toutes les particules (galaxies) sont accélérées les unes par rapport aux autres. Comment donc matérialiser le repère inertiel où les équations sont censées être valables ?

On peut suivre Leibniz et dire que seuls les mouvements relatifs importent. Alors chaque point-galaxie définit un repère local "en chute libre" dans lequel les équations sont postulées être valables. Cette équivalence dynamique entre repères en chute libre et repères inertiels signifie que l'on peut localement effacer la gravitation. Le fait que cela soit possible provient de l'égalité masse grave masse inerte et de l'invariance des équations du mouvement ($\Delta U = 4\pi G\rho$, $a = -\nabla U$) dans le groupe de Milne déjà mentionné $x \to x' = x - b(t)$, à condition de transformer concomitamment le potentiel selon $U \to U' = U - x.\ddot{b}$. On remarque que dans ces transformations du groupe de Milne, le potentiel gravitationnel n'est plus une grandeur intrinsèque, indépendante du repère.

3. Electromagnétisme et relativité restreinte

a. Espace-temps absolu, invariance de Lorentz

• *Mouvement d'une particule chargée*

Le mouvement, dans le repère absolu $\mathcal{S}$, d'une particule de masse m et charge q soumise à un champ électromagnétique $(E_\mathcal{S}, B_\mathcal{S})$ est régi par l'équation de Lorentz

$$m\,\frac{d}{dt}\frac{v_\mathcal{S}}{\sqrt{1 - v_\mathcal{S}^2/c^2}} = q\left(E_\mathcal{S} + \frac{1}{c} v_\mathcal{S} \times B_\mathcal{S}\right) \tag{1.3.1}$$

où c est la vitesse de la lumière. Pour préserver l'invariance de Galilée de cette équation il faut admettre que les champs électrique et magnétique ne sont pas des vecteurs intrinsèques. Au premier ordre en $1/c$ on doit avoir

$$v_{\mathcal{S}} = v_{\mathcal{S}_g} + V \quad , \quad E_{\mathcal{S}} = E_{\mathcal{S}_g} + \frac{1}{c} B_{\mathcal{S}_g} \times V \quad , \quad B_{\mathcal{S}} = B_{\mathcal{S}_g} - \frac{1}{c} E_{\mathcal{S}_g} \times V \tag{1.3.2}$$

où V est la vitesse relative des deux repères.

Ces règles de transformations sont bien lourdes. De plus elles ne valent qu'au premier ordre. On peut "s'en sortir" en introduisant avec Lorentz la notion de "contraction des longueurs", et on peut "expliquer" aussi le résultat de l'expérience de Michelson et Morley montrant que la vitesse de la lumière a même valeur dans tout repère galiléen, ce qui contredit à première vue la loi galiléenne de composition des vitesses : "les hypothèses, c'est le fond qui manque le moins" disait Poincaré. En 1905 Einstein fit table rase de tous ces "bricolages" en proposant la relativité restreinte.

• *Une nouvelle géométrie*

En relativité restreinte l'espace *et* le temps sont représentés par un *espace-temps absolu* $\mathcal{S}$ à quatre dimensions pseudo-euclidien, dont les points (appelés aussi *événements*) sont repérés par des coordonnées minkowskiennes $X^i, i = (0, 1, 2, 3)$, de sorte que l'élément de longueur s'écrit

$$ds^2 = -(dX^0)^2 + (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2 \equiv \eta_{ij}\, dX^i dX^j \tag{1.3.3}$$

où η_{ij} sont les composantes, dans $\mathcal{S}$ du tenseur métrique de Lorentz, ℓ. (N.B. : lorsque $ds^2 < 0$ le carré de la longueur est défini comme $-ds^2$).

Les trois axes spatiaux (X^α) du repère absolu représentent les axes du référentiel absolu de Newton ; le quatrième (X^0) représente le temps $T \equiv X^0/c$ d'une horloge immobile dans le référentiel absolu. Ainsi T est la longueur (divisée par c) de la trajectoire (ou *ligne d'univers*) d'un observateur immobile dans $\mathcal{S}$.

• *Cinématique*

La ligne d'univers d'un point matériel P est donnée par quatre équations $X^i = x^i_{\mathcal{S}}(\tau)$ où τ est un paramètre. Les composantes de ses *quadri-vitesse* et *quadri-accélération* sont $u^i_{\mathcal{S}} = \frac{dx^i_{\mathcal{S}}}{d\tau} \equiv \dot{x}^i_{\mathcal{S}}$ et $a^i_{\mathcal{S}} = \dot{u}^i_{\mathcal{S}}$. Les lignes d'univers issues de O de longueur nulle définissent le *cône de lumière* et on postule qu'elles décrivent les trajectoires des rayons lumineux issus de O. On postule aussi que les particules de masse non-nulle se propagent à l'intérieur du cône. Le paramètre $c\tau$ peut dans ce cas être choisi de sorte que $\eta_{ij} u^i_{\mathcal{S}} u^j_{\mathcal{S}} = -c^2$ et mesure l'abscisse curviligne de P. En accord avec l'interprétation de T, τ définit alors le *temps propre* mesuré à la montre de l'observateur P.

Une conséquence de cette interprétation de τ est que, comme la trajectoire la plus *longue* entre les deux événements $(0, 0, 0, 0)$ et $(cT, 0, 0, 0)$ est la ligne droite les joignant, un voyageur vieillira moins qu'un sédentaire. Cette prédiction est vérifiée chaque jour dans les accélérateurs de particules et suffit à justifier l'abandon du cadre euclidien de la théorie newtonienne.

Le groupe, dit de Poincaré, qui laisse inchangée la forme de l'élément de longueur lorentzien est l'ensemble $\mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ tel que

$$X'^i = \Lambda_j{}^i X^j - b'^j \quad \text{avec} \quad \Lambda_k{}^i \Lambda_l{}^i \eta_{ij} = \eta_{kl} \, . \tag{1.3.4}$$

C'est un groupe à dix paramètres, quatre de translations spatio-temporelles, trois caractérisant les rotations des axes spatiaux, et trois représentant les composantes de la vitesse relative des deux repères (ce sous-groupe est dit de Lorentz). Ainsi ce groupe unifie-t-il changement de repère spatial cartésien et passage d'un repère inertiel à un autre. Une conséquence immédiate de cette unification est que quadri-accélération *et* quadri-vitesse (contrairement à ce qui se passe en théorie newtonienne) sont des quadri-vecteurs intrinsèques dans les changements de repères inertiels : $u^i_{\mathcal{S}_g} = \Lambda_j{}^i u^j_{\mathcal{S}} \Rightarrow u_{\mathcal{S}} = u_{\mathcal{S}_g} \equiv u$. Par ailleurs la vitesse de la lumière est invariante sous ce groupe, ce qui explique de manière élégante le résultat de l'expérience de Michelson-Morley.

• *Dynamique et invariance de Lorentz*

La loi du mouvement d'un corps ponctuel est la généralisation de la loi newtonienne : $m^{(i)}\, a = F$ où maintenant l'accélération et la force sont des quadri-vecteurs intrinsèques dans les transformations de Poincaré. Ainsi l'équation de Lorentz (1.3.1) se réécrit

$$m^{(i)}\, a^i = F^i \quad \text{avec} \quad F^i = \frac{q}{c} F^i{}_j\, u^j \quad \text{et} \quad F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i \tag{1.3.5}$$

où $F_{ij} \equiv \eta_{ki} F^k{}_j$, où $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$, et où le quadri-vecteur potentiel $A^i \equiv \eta^{ij} A_j$ a pour composantes le potentiel coulombien et le "potentiel vecteur". Dans un autre repère inertiel on aura simplement, au lieu de (1.3.2)

$$u'^i = \Lambda_j{}^i\, u^j \quad , \quad F'^i_j = \Lambda_k{}^i \Lambda^l{}_j\, F^k_l \quad , \quad a'^i = \Lambda_j{}^i\, a^j \tag{1.3.6}$$

($\Lambda^l{}_j$ étant la matrice inverse de $\Lambda_j{}^l$) de sorte que, après suppression des indices "prime", l'équation de Lorentz s'écrira toujours sous la forme (1.3.5).

b. Repères accélérés et coordonnées curvilignes

• *Abandon des "déplacements rigides"*

En théorie newtonienne le groupe des déplacements rigides décrit le passage d'un référentiel cartésien à un autre, en mouvement quelconque par rapport au premier. En relativité seul le groupe de Poincaré laisse la forme de l'élément de longueur inchangé.

Le passage à un repère accéléré sera donc "encodé" dans une transformation de coordonnées curvilignes $\mathcal{S} \to \mathcal{C}$, $X^i = X^i(x^j)$ qui transforme l'expression de l'élément de longueur selon

$$ds^2 = \eta_{ij}\, dX^i dX^j = \ell_{kl}\, dx^k dx^l \quad \text{avec} \quad \ell_{kl} = \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \frac{\partial X^j}{\partial x^l} \, , \tag{1.3.7}$$

où ℓ_{kl} sont les composantes dans $\mathcal{C}$ du tenseur métrique ℓ.

Dans une telle transformation, sauf exception, les trois axes spatiaux ne restent pas orthornormés au cours du mouvement. Les repères accélérés, de "rigides", deviennent "mous" (selon l'expression d'Einstein).

• *Equation du mouvement en repère accéléré*

Exactement comme dans le cas euclidien étudié plus haut, la quadri-vitesse, de composantes $u^i \equiv \dot{x}^i_{\mathcal{S}} = \frac{\partial X^i}{\partial x^k} u^k_{\mathcal{C}}$ est un quadri-vecteur intrinsèque dans le passage à des coordonnées curvilignes. Et tout comme dans le cas euclidien, la quadri-accélération $a_{\mathcal{S}} = \dot{u}_{\mathcal{S}}$ n'est pas intrinsèque dans ces tranformations, mais la dérivée covariante de la quadri-vitesse, elle, l'est. Ainsi dans tout système de coordonnées curvilignes, c.-à-d. dans tout repère accéléré, la loi de la dynamique s'écrit-elle sous la forme

$$m^{(i)} \frac{Du^i}{d\tau} = F^i \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \dfrac{Du^i}{d\tau} = \dfrac{du^i}{d\tau} + \Gamma^i_{jk} u^j u^k \\ \Gamma^i_{jk} = \dfrac{1}{2} \ell^{im} (\partial_k \ell_{lm} + \partial_k \ell_{mj} - \partial_m \ell_{jk}) \,. \end{cases} \tag{1.3.8}$$

Si la force F^i est celle de Lorentz on a : $F^i = \frac{q}{c} F^i{}_j u^j$, $F^i{}_j = \ell^{ik} F_{kj}$, $F_{ij} = D_i A_j - D_j A_i$.

L'équation (1.3.8) est la version relativiste des *trois* équations (1.1.24). En unifiant passage à des coordonnées curvilignes et passage à des repères accélérés elle incorpore dans la dérivée covariante les accélérations d'inertie, et ainsi les *géométrise*.

Lorsque la force est nulle, l'équation $\frac{Du^i}{d\tau} = 0$ décrit le mouvement d'une particule libre, décrite dans n'importe quel système de coordonnées et repère. C'est donc l'équation générale d'une droite (ou *auto-parallèle*), chemin extrémal (ou *géodésique*) joignant deux points.

• *"Redshift" en repère accéléré*

Soient P_{em} et P_{rec} deux observateurs immobiles en x^α_{em} et x^α_{rec} dans un repère accéléré caractérisé par les coordonnées x^i dans lequel l'élément de longueur s'écrit $ds^2 = \ell_{kl} dx^k dx^l$.

P_{em} envoie deux signaux lumineux à P_{rec} à intervalle Δt_{em} du temps coordonnée $t = x^0/c$. Si les composantes de la métrique ne dépendent pas de x^0 alors P_{rec} recevra ces signaux (qui se propagent le long de cônes de lumière) à intervalle $\Delta t_{rec} = \Delta t_{em}$. Mais les intervalles de temps *propre*, i.e. les intervalles effectivement mesurés aux montres des observateurs, eux, seront différents puisque l'on a $\Delta\tau = \sqrt{-\ell_{00}}\, \Delta t$.

Par conséquent la fréquence du signal reçu est différente de celle du signal émis

$$\frac{\nu_{rec}}{\nu_{em}} = \sqrt{\frac{\ell_{00}(em)}{\ell_{00}(rec)}} \,. \tag{1.3.9}$$

Bien sûr le calcul de ce décalage spectral peut s'effectuer dans le repère inertiel où, par exemple, P_{em} est au repos et P_{rec} a un mouvement accéléré. Il faut alors effectuer explicitement le passage des coordonnées x^i aux coordonnées minkowskiennes X^i et le résultat est (1.3.9). Dans le repère inertiel le décalage est interprété comme un simple effet Doppler dû au mouvement relatif des observateurs. Dans le repère accéléré il est mis sur le compte de l'accélération du repère.

4. Gravitation et relativité générale

a. Le principe d'équivalence

La relativité restreinte réconcilie équations de Lorentz (et de Maxwell) de l'électromagnétisme et principe de relativité (invariance des équations dans les transformations de Poincaré). De plus elle géométrise les forces d'inertie, "incorporées" dans les symboles de Christoffel de la dérivée covariante de la quadri-vitesse. Ce faisant, elle donne les équations du mouvement sous une forme unique, valable dans tout repère et tout système de coordonnées.

Ainsi, l'ambition d'Einstein dès 1907 fut d'inclure dans ce cadre l'autre force fondamentale de son temps, à savoir la gravitation, mais non pas comme une force extérieure comme la force de Lorentz, mais en la géométrisant, c.-à-d. en l'incorporant dans une dérivée covariante généralisée.

La raison pour laquelle une telle géométrisation de la gravitation est concevable est que masse grave et masse inerte sont égales : dans un champ d'inertie comme dans un champ de gravitation tous les corps tombent de la même façon. Ainsi "inertie=gravitation". C'est le "principe d'équivalence".

Ce principe implique que l'on peut effacer un champ de gravitation en se plaçant dans un repère (accéléré) en chute libre. Dans ce repère une particule "libre" au repos reste au repos. Le repère est donc inertiel. Ceci étant il ne peut être inertiel que localement, pour une courte durée. En effet, si par exemple le repère tombe dans le champ d'une étoile, les particules "libres" vont se rapprocher les unes des autres. Dans l'espace-temps représentant un champ de gravitation, les "parallèles se coupent" ; il est "courbe".

Ce principe d'équivalence implique réciproquement qu'un observateur accéléré dans un univers sans gravitation peut imputer ses observations, par exemple un décalage spectral, non pas à son accélération mais à un champ de gravitation.

b. Illustration : le "redshift" gravitationnel

Soit une "tour" accélérée le long de l'axe $X^3 = Oz$ d'un repère inertiel. Deux rayons lumineux émis à $t = 0$ et $t = \Delta\tau_{em}$ de $z = 0$ (où $v_0 = 0$) sont reçus en $z = h$; à l'instant de réception la tour a acquis la vitesse $v \simeq gh/c^2$ où g est son accélération, et le signal est "redshifté" par effet Doppler ; à l'ordre le plus bas en v/c : $\Delta\tau_{rec} \simeq \Delta\tau_{em}(1 + gh/c^2)$.

Le principe d'équivalence stipule qu'accélération et champ de gravitation ne font qu'un. On doit donc observer le même redshift dans une tour immobile dans un champ de gravitation, celui de la Terre par exemple. Alors $-gh \simeq U_{bas} - U_{haut}$ où $U = -GM_\otimes/R$ est le potentiel gravitationnel et $g \equiv GM_\otimes/R_\otimes^2$ l'accélération gravitationnelle à la surface de la Terre. Par conséquent

$$\nu_{haut} \simeq \nu_{bas}\left(1 - \frac{gh}{c^2}\right) \simeq \nu_{bas}\left(1 + \frac{U_{bas} - U_{haut}}{c^2}\right) . \qquad (1.4.1)$$

Ce redshift gravitationnel, expression du principe d'équivalence prédit par Einstein en 1907 puis 1911, fut mesuré pour la première fois en 1960 par Pound et Rebka dans la tour de

Harvard ($h \approx 22m$, $g \approx 10m/sec^2$, $\Delta\nu/\nu \approx 2.5 \times 10^{-15}$) et tout “GPS” serait impossible sans en tenir compte.

Pour faire le calcul de l’effet Doppler dans la tour accélérée, on peut aussi se mettre dans le repère accéléré où la tour est immobile. Dans ce nouveau repère, l’élément de longueur s’écrit $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ où g_{ij} sont les composantes du tenseur métrique dans ce repère. Alors, comme on l’a vu plus haut : $\nu_{haut} = \nu_{bas}\sqrt{\frac{g_{00}(bas)}{g_{00}(haut)}}$. Par conséquent

$$g_{00} \simeq -\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) \tag{1.4.2}$$

où U est le potentiel newtonien.

Précisons : ce g_{00} est la composante (00) de la métrique d’un espace-temps légèrement courbé par la gravitation (c’est pourquoi on note le tenseur métrique g plutôt que ℓ), dans un repère quasi-minkowskien.

c. Un espace-temps pseudo-riemannien

En relativité générale l’espace et le temps sont représentés par une “variété” V_4, i.e. un ensemble de points (“événements”) repérés par quatre coordonnées x^i.

Localement on peut toujours trouver un système de coordonnées $X^i(x^j)$ tel que $ds^2 \simeq \eta_{ij}dX^i dX^j$ (V_4 est localement M_4). Dans cet “éclat” d’espace-temps de Minkowski, on peut définir des vecteurs, tenseurs, etc... et écrire par exemple les équations de Lorentz sous la forme (1.3.5).

Pour comparer des vecteurs, etc... en des points éloignés, voir par exemple comment des trajectoires “localement parallèles” finissent par se couper, il faut “connecter” les différents éclats de M_4 et donc adjoindre une structure, la *connexion*, qui définit le *transport parallèle* global des vecteurs, etc... Ainsi une *auto-parallèle* est telle que $\frac{Du^i}{d\tau} \equiv \frac{du^i}{d\tau} + \{{}^{\,i}_{jk}\}u^j u^k = 0$, où D est la *dérivée covariante* associée à la connexion et $\{{}^{\,i}_{jk}\}$ ses coefficients, qui sont a priori 64 fonctions arbitraires des coordonnées. S’il existe quatre fonctions $X^i(x^j)$ telles que $\{{}^{\,i}_{jk}\} = \frac{\partial^2 X^a}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial X^a}$, alors la connexion ne fait qu’exprimer le changement des coordonnées cartésiennes X^i aux coordonnées x^i dans M_4. S’il n’en existe pas, alors il est impossible de trouver un système de coordonnées global où les coefficients de la connexion sont tous nuls, et V_4 est alors dit courbe.

Pour définir maintenant des distances et des longueurs de courbe on introduit une autre structure, la métrique ; l’élément de longueur est défini par $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ où les g_{ij} sont a priori 10 fonctions arbitraires des coordonnées. Une géodésique, trajectoire extrémale, est alors donnée par $\frac{du^i}{d\tau} + \Gamma^i_{jk}u^j u^k = 0$ où les

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{il}(\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk}) \tag{1.4.3}$$

sont les *symboles de Christoffel* de la métrique. Là encore, s’il existe quatre fonctions $X^i(x^j)$ telles que $g_{ij} = \frac{\partial X^k}{\partial x^i}\frac{\partial X^l}{\partial x^j}\eta_{kl}$ alors V_4 n’est autre que M_4, et dans les coordonnées X^i tous les symboles de Christoffel sont nuls. Dans le cas contraire V_4 est courbe.

Pour que les deux notions de platitude coïncident il suffit que les notions d'autoparallèle et de géodésique se confondent et que : $\{{i \atop jk}\} = \Gamma^i_{jk}$. La connexion est dite alors de Levi-Civita et l'on vérifie que l'on a : $D_i g_{jk} = 0$. V_4 est dans ce cas une variété *riemannienne*, déterminée entièrement par sa métrique g de composantes g_{ij} dans un système de coordonnées donné x^i. Plus précisément la relativité générale représente l'espace-temps par une variété V_4 "pseudo" riemannienne, qui se réduit localement à l'espace-temps pseudo-euclidien de Minkowski.

d. Le tenseur de Riemann-Christoffel

Trouver s'il existe ou non des changements de coordonnées qui annullent globalement les symboles de Christoffel pour décider si un espace est courbe ou non n'est pas toujours tâche aisée. Heureusement il existe un objet intrinsèque, le *tenseur de Riemann-Christoffel* qui est nul si et seulement si l'espace associé est plat.

• *Transport parallèle le long d'un parcours fermé*

Transportons parallèlement à lui-même un vecteur T^i le long d'un trajet infinitésimal d_1x^j, puis le long de d_2x^j. Si maintenant nous avions transporté T^i le long de d_2x^j d'abord puis de d_1x^j sa variation aurait été obtenue de même, en intervertissant les rôles de '1' et '2'. La différence entre les deux résultats s'écrit (après calcul au deuxième ordre) : $(\delta_{21} - \delta_{12})T^i = T^j d_2x^l d_1x^k R^i_{jkl}$ où :

$$R^i_{jkl} = \partial_k \Gamma^i_{jl} - \partial_l \Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{jl} - \Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{jk} \tag{1.4.4}$$

est le *tenseur de Riemann-Christoffel* (ou encore de *courbure*). Il est une fois contravariant et trois fois covariant ; dans le changement de coordonnées $x^i \to x'^i$ il se transforme selon $R^i_{jkl} \to R'^i_{jkl}$ avec $R'^i_{jkl} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^a}\frac{\partial x^b}{\partial x'^j}\frac{\partial x^c}{\partial x'^k}\frac{\partial x^d}{\partial x'^l}R^a_{bcd}$. Si ses composantes sont nulles dans un système, elles le sont dans tout autre et l'espace est plat.

• *Commutation des dérivées covariantes et déviation géodésique*

Le tenseur de courbure exprime également la non-commutativité des dérivées covariantes. En effet on montre facilement que

$$(D_iD_j - D_jD_i)T^k = -R^k_{lij}T^l \,. \tag{1.4.5}$$

Enfin il exprime la façon dont les géodésiques s'approchent ou s'éloignent. Plus précisément, soit $x^i_p(\tau)$ une famille de géodésiques, i.e. telles que $\frac{Du^i_p}{d\tau} = 0$ avec $u^i_p = \frac{dx^i_p}{d\tau}$. On note $n^i = \frac{\partial x^i}{\partial p}$ le vecteur écartement. On montre facilement l'équation de déviation géodésique

$$a^i \equiv \frac{D^2 n^i}{d\tau^2} = R^i_{mjk}u^m u^j n^k \,. \tag{1.4.6}$$

• *Propriétés du tenseur de courbure*

Nous laissons en exercice les démonstrations suivantes :
- $R^k_{lji} = -R^k_{lij}$,

- $R^k_{lji} + R^k_{jil} + R^k_{ilj} = 0$ (première identité de Bianchi),
- $D_m R^i_{jnp} + D_n R^i_{jpm} + D_p R^i_{jmn} = 0$ (seconde identité de Bianchi)

Si on définit $R_{ijkl} = g_{ip} R^p_{jkl}$, alors : $R_{ijkl} = -R_{jikl} = R_{klij}$.

Si l'on introduit le *tenseur de Ricci* r_{ij} et la *courbure scalaire* s par :

$$r_{ij} = R^l_{ilj} \qquad , \qquad s = g^{ij} R_{ij} \tag{1.4.7}$$

on montre facilement, à partir des identités de Bianchi et de la nullité de la dérivée covariante de g, l'importante propriété :

$$D_i G^{ij} = 0 \,, \qquad \text{où} \qquad G_{ij} = r_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} s \tag{1.4.8}$$

est le *tenseur d'Einstein.*

5. Les équations relativistes de la gravitation

a. Matière en espace-temps courbe

• *Les particules*

Dans un espace-temps courbé par la gravitation une particule massive est en chute "libre" et son mouvement est régi par l'équation géodésique : $\frac{Du^i}{d\tau} = 0$, où $u^i = \frac{dx^i}{dt}$ est sa quadri-vitesse et τ son temps propre, tel que $g_{ij} u^i u^j = -c^2$. Un rayon lumineux, lui, suit une géodésique nulle.

Considérons par exemple l'élément de longueur

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{2\beta m^2}{r^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{2\gamma m}{r}\right) [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \tag{1.5.1}$$

avec $m \equiv GM/c^2$. Il s'avèrera que cette métrique, avec $\beta = \gamma = 1$, sera (à l'ordre $\mathcal{O}(m^3)$) celle de *Schwarzchild*, représentant le champ gravitationnel d'une étoile de masse M isolée et sans rotation. (Le coefficient de l'ordre linéaire de g_{00} est fixé par le "redshift gravitationnel" (1.4.2) déduit du principe d'équivalence.)

L'intégration de l'équation des géodésiques nulles (Einstein, 1915) donne la déviation d'un rayon de lumière frôlant le soleil comme étant

$$\Delta\phi \simeq \frac{2GM_\odot(1+\gamma)}{c^2 R_\odot} \approx 1.75\text{"} \quad \text{pour} \quad \gamma = 1 \tag{1.5.2}$$

valeur double du résultat newtonien mentionné plus haut. Eddington mesura (approximativement) cette déviation lors d'une expédition au Brésil en 1919, ce qui scella le triomphe de la relativité générale.

L'intégration de l'équation des géodésiques qu'obéissent les particules donne les corrections relativistes aux ellipses de Kepler et implique une avance du périhélie des planètes de

$$\Delta\omega \simeq \frac{6\pi GM_\odot}{c^2 a(1-e^2)} \left(\frac{2 - \beta + 2\gamma}{3}\right) \approx 43\text{"} \text{par siècle} \tag{1.5.3}$$

pour $\beta = \gamma = 1$ et pour Mercure. Ce résultat, obtenu en 1915 par Einstein, qui coïncide avec la précession observée par le Verrier 70 ans plus tôt et inexpliquée en théorie newtonienne, fut semble-t-il la plus grande émotion scientifique de sa vie.

• *L'exemple d'un champ scalaire*

Que ce soit dans un espace-temps plat (sans gravitation donc) mais décrit en repère accéléré ou dans un espace-temps courbé par la gravitation, l'*action* pour un champ scalaire Φ est donnée par

$$S_c = -\int \left[\frac{1}{2} g^{ij}\partial_i\Phi\partial_j\Phi + V(\Phi)\right]\sqrt{-g}\, d^4x \tag{1.5.4}$$

où g_{ij} décrit le repère et, éventuellement, le champ de gravitation et où $V(\Phi)$ est le potentiel de Φ.

L'extrémisation de S_c ($\delta_\Phi S_c = 0$) lorsque le champ change de configuration, $\Phi \to \Phi + \delta\Phi$, conduit à l'équation de Klein-Gordon qui régit la dynamique de Φ :

$$\Box\Phi - \frac{dV}{d\Phi} = 0 \tag{1.5.5}$$

où le d'alembertien est donné explicitement par $\Box\Phi = g^{ij}D_iD_j\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_i(\sqrt{-g}g^{ij}\partial_j\Phi)$.

• *Le tenseur énergie-impulsion et sa conservation*

Si l'on varie maintenant l'action non par rapport au champ scalaire Φ mais par rapport à la métrique g_{ij} on obtient

$$\delta_g S_c = \frac{1}{2c}\int T^{ij}\delta_{ij}\sqrt{-g}\, d^4x \tag{1.5.6}$$

avec

$$\frac{1}{c}T_{ij} = \partial_i\Phi\partial_j\Phi - g_{ij}\left(\frac{1}{2}g^{kl}\partial_k\Phi\partial_l\Phi + V(\Phi)\right). \tag{1.5.7}$$

T_{ij} est le *tenseur énergie-impulsion* du champ scalaire Φ (on rappelle que les indices sont descendus et montés à l'aide de la métrique et de son inverse, par exemple : $T^i_j = g_{jk}T^{ik} = g^{ik}T_{jk}$).

L'action est un scalaire, i.e. a même valeur dans tout système de coordonnées. Si donc la variation de g_{ij} ne correspond pas à un changement de champ de gravitation mais à un simple changement de coordonnées $x^i \to x^i + \xi^i$, on trouve

$$\delta_\xi S_c = 0 = \int (D_iT^{ij})\xi_j\sqrt{-g}\, d^4x \quad \Longleftrightarrow \quad D_iT^{ij} = 0\,. \tag{1.5.8}$$

Cette loi de conservation du tenseur énergie-impulsion est équivalente à l'équation du mouvement du champ. Ainsi, pour T_{ij} donné par (1.5.7), on retrouve l'équation de Klein-Gordon (1.5.5).

• *Cas d'un fluide parfait*

Lorsque la matière est décrite phénoménologiquement comme un ensemble dense caractérisé par une *densité d'énergie* $\epsilon(x^j)$ (ou densité de masse $\rho(x^i) \equiv \epsilon(x^i)/c^2$), une quadri-vitesse $u^i(x^j)$ et une *pression* $p(x^j)$ il ne fait pas très grand sens de chercher une action la décrivant (mais cela est possible). Ce sont plutôt des considérations d'ordre phénoménologique qui conduisent à l'expression suivante pour le tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait :

$$T_{ij} = (\epsilon + p)u_i u_j + p g_{ij} \,. \tag{1.5.9}$$

La loi de conservation (1.5.8) donne les équations du mouvement du fluide, valables dans tout repère ou en présence de gravitation, généralisation relativiste des équations de continuité et d'Euler newtoniennes, à savoir

$$\begin{gathered} \dot{\epsilon} + (\epsilon + p) D_i u^i = 0 \\ (\epsilon + p)\frac{Du_k}{d\tau} + \frac{dp}{d\tau} u_k + \partial_k p = 0 \,. \end{gathered} \tag{1.5.10}$$

b. Les équations d'Einstein

• *Récapitulation*

La relativité restreinte géométrise les forces d'inertie en les incorporant dans la dérivée covariante associée à l'espace-temps plat de Minkowski décrit dans un repère accéléré.

Le principe d'équivalence stipule qu'inertie=gravitation.

La gravitation est donc incorporée dans une dérivation covariante associée à un espace-temps plus général que celui de Minkowski, courbe.

En l'absence de matière il n'y a pas de champ de gravitation et l'espace-temps qui représente cet univers vide est l'espace-temps plat de Minkowski. C'est donc la matière qui courbe l'espace-temps.

Les équations de la gravitation doivent donc relier géométrie et matière, i.e. le tenseur de Riemann (ou ses dérivés) à un objet géométrique décrivant la "gravité" de la matière.

• *L'approche d'Einstein (1914-1916)*

L'objet tensoriel qui décrit complètement la matière est son tenseur énergie-impulsion, T_{ij}, deux fois covariant. Un tenseur géométrique de même nature est le tenseur de Ricci, $r_{ij} = R^a_{iaj}$. En 1914 Einstein propose donc comme équations de la gravitation : $r_{ij} \propto T_{ij}$. Ce sont bien là dix équations pour les dix composantes de la métrique g_{ij}. Mais on sait d'une part que les composantes de la métrique décrivent à la fois le champ de gravitation et le repère utilisé ; or le principe d'équivalence stipule que le choix du repère doit rester libre ; les équations doivent donc laisser indéterminées quatre des dix composantes g_{ij}. D'autre part le tenseur énergie-impulsion est conservé : $D_i T^i_j = 0$; les équations proposées restreignent donc la métrique, qui doit être telle que $D_i r^i_j = 0$. Bref,... elles sont fausses.

L'identité de Bianchi mentionnée plus haut, $D_i G^i_j = 0$ où $G_{ij} = r_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} s$ est le tenseur d'Einstein et $s = g^{ij} r_{ij}$ la courbure scalaire, résout tous les problèmes. Les équations finales proposées par Einstein en 1916 sont donc

$$G_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} \,. \tag{1.5.11}$$

En utilisant l'expression approchée (1.4.2) de la métrique et en développant les tenseurs d'Einstein et d'énergie-impulsion au plus bas ordre en $1/c$ on montre facilement que les équations d'Einstein se réduisent bien à celle de Newton ($\triangle U = 4\pi G\rho$ avec $\rho = \epsilon/c^2$).

• *L'approche de Hilbert (1916)*

Hilbert, lui, déduisit (à peu près en même temps qu'Einstein) les équations (1.5.11) à partir d'un principe variationnel.

On connaît l'action pour la matière (par exemple (1.5.4) pour un champ scalaire) ; on connaît également la variation de cette action par rapport à une variation de la métrique δg_{ij} : elle est donnée par (1.5.6). Il faut donc trouver une action pour le champ de gravitation qui soit un scalaire, fonctionnelle de la géométrie, i.e. du tenseur de Riemann. Le scalaire le plus simple est s. Plus précisément en prenant pour action totale

$$S = S_c + \frac{c^3}{16\pi G}\int s\sqrt{-g}\, d^4x \tag{1.5.12}$$

on trouve que $\delta_g S = 0$ donne les équations d'Einstein (1.5.11).

N.B. : dorénavant nous poserons $c = 1$.

II. Géométries de l'univers et “modèle standard”

1. Espaces homogènes et isotropes

En relativité générale, toute solution des équations d'Einstein représente un univers possible ; ainsi par exemple la solution de Schwarzschild approchée (1.5.1) décrit un seul astre dans l'Univers. En ce sens la cosmologie est inévitable en relativité générale. Ceci dit il est impossible techniquement de représenter l'univers réel dans sa complexité, impossible également de le décrire comme une hiérarchie de structures (même si cela serait peut-être souhaitable). On en est de facto réduit à gommer toutes les irrégularités de la distribution de matière, et à décrire l'Univers comme a-structuré, i.e. à le représenter par un espace “à symétrie maximale”.

a. Espaces à symétrie maximale

• *Notion d'isométrie*

Soit un élément de longueur $ds^2 = g_{ij}dx^idx^j$. Lorsqu'on passe d'un point x^i à un autre $\tilde{x}^i = x^i + \xi^i$, les composantes de la métrique se transforment au premier ordre en ξ^i selon : $g_{ij}(\tilde{x}^k) \simeq g_{ij}(x^k) + \xi^k\partial_k g_{ij}$. Si cette transformation peut être compensée par un simple changement de coordonnées, de sorte que dans les nouvelles coordonnées les composantes de la métrique ont même expression qu'en x^i, alors la variété possède une *isométrie* définie par le *vecteur de Killing* ξ^i. Dans des coordonnées adaptées à l'éventuelle isométrie on doit simplement avoir : $\xi^k\partial_k g_{ij} = 0$. Prenons l'exemple de $\mathcal{E}_3$. Si l'on écrit son élément de longueur sous la forme : $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, alors le vecteur de Killing $\xi^i = (\epsilon, 0, 0)$, où ϵ est une constante, traduit l'invariance par translation selon l'axe x de l'espace euclidien ; si l'on écrit dl^2 sous la forme : $dl^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$, alors $\xi^i = (0, 0, \epsilon)$ traduit l'invariance par rotation autour de l'axe z de $\mathcal{E}_3$. Dans le cas d'un espace quelconque en coordonnées quelconques, ξ^i est vecteur de Killing si et seulement si il satisfait aux *équations de Killing*

$$\xi^k\partial_k g_{ij} + g_{ik}\partial_j\xi^k + g_{jk}\partial_i\xi^k = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad D_i\xi_j + D_j\xi_j = 0 \tag{2.1.1}$$

où D est la dérivée covariante associée à la métrique g_{ij}.

• *Symétrie maximale*

Un espace euclidien de dimension N, $\mathcal{E}_N$, possède N vecteurs de Killing de translation, traduisant son homogénéité, et $N(N-1)/2$ de rotation traduisant son isotropie—soit $N(N+1)$ en tout. Il en est de même de la sphère S_N et de l'hyperboloïde H_N. On montre (Eisenhart, 1949) qu'il n'y a pas d'autre variété de dimension N localement euclidienne possédant autant ou plus de vecteurs de Killing que ces trois familles. Elles constituent ainsi l'ensemble des espaces de dimension N à *symétrie maximale*.

On montre aussi que dans un système de coordonnées quelconque où les composantes de la métrique sont g_{ab}, les tenseurs de courbure, de Ricci et la courbure scalaire des espaces maximalement symétriques s'écrivent

$$R_{abcd} = K(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \quad \Longrightarrow \quad r_{ab} = (N-1)Kg_{ab} \quad , \quad s = N(N-1)K \tag{2.1.2}$$

où K est une constante positive, nulle, ou négative selon que l'espace est S_N, $\mathcal{E}_N$ ou H_N.

Ainsi donc, si $N = 3$, l'élément de longueur des espaces maximalement symétriques localement euclidiens peut s'écrire sous la forme

$$d\sigma_3^2 = a^2[d\chi^2 + f_K^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \quad \text{où} \quad \begin{cases} f_0(\chi) = \chi & \text{si} \quad V_3 = \mathcal{E}_3 \\ f_{+1}(\chi) = \sin\chi & \text{si} \quad V_3 = S_3 \\ f_{-1}(\chi) = \sinh\chi & \text{si} \quad V_3 = H_3 \end{cases} \tag{2.1.3}$$

et où a (qui a la dimension d'une longueur) ne dépend pas de (χ, θ, ϕ). En posant $r = f_K(\chi)$ (2.1.3) s'écrit aussi

$$d\sigma_3^2 = a^2\left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right]. \tag{2.1.4}$$

Enfin, si $\bar{r} = \frac{2r}{1+\sqrt{1-Kr^2}}$ on a

$$d\sigma_3^2 = \frac{a^2}{1 + K\bar{r}^2/4}\left[d\bar{r}^2 + \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right]. \tag{2.1.5}$$

N.B. : le volume de S_3 est fini : $\int d^3V = \int \sqrt{g}\, d\chi d\theta d\phi = a^3 \int \sin^2\chi \sin\theta\, d\chi d\theta d\phi = 2\pi^2 a^3$. Le volume de $\mathcal{E}_3$ et de H_3 est infini, sauf si on les munit de topologies non-triviales (celle du tore par exemple).

b. Espaces-temps de Robertson-Walker

• *Sous-espace à symétrie maximale*

Soit V_4 un espace pseudo-riemannien à quatre dimensions. Supposons qu'il existe un champ de vecteurs du genre temps (que l'on peut considérer comme tangents aux trajectoires d'observateurs) tel que toutes les sections spatiales de V_4 orthogonales à ce champ soient maximalement symétriques. Une variété ainsi feuilletée est un espace de *Robertson-Walker* et son élément de longueur peut s'écrire sous la forme :

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right] \tag{2.1.6}$$

(un terme en $dt\, dx^\alpha$ briserait l'isotropie et le coefficient de dt^2 peut toujours être normalisé à $c^2 = 1$) ; t est le *temps cosmique*, $a(t)$ le *facteur d'échelle* et $H \equiv \frac{\dot a}{a}$ le *paramètre de Hubble*. On utilise souvent aussi le *temps conforme*, η, défini par $dt = a(\eta)\, d\eta$ (ainsi que les coordonnées spatiales (2.1.3) ou (2.1.5)).

• *Coordonnées comobiles*

Par construction les observateurs immobiles (i.e. en r, θ, ϕ constants) suivent des géodésiques.

On peut voir cela directement : l'équation d'une géodésique étant $\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau} = 0$, si $\frac{dx^\alpha}{d\tau}|_{(\tau=0)} = 0$ alors $\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}|_{(\tau=0)} = 0$ car $\Gamma^\alpha_{00} = 0$.

Les observateurs immobiles dans le repère sont donc en chute libre et le système de coordonnées (t, r, θ, ϕ) est dit comobile.

• *Courbure*

Les tenseurs de courbure, de Ricci, la courbure scalaire et le tenseur d'Einstein de la métrique (2.1.6) se calculent à partir des définitions (1.4.4) (1.4.7) et (1.4.8), simplifiées grâce à (2.1.2) (les symboles de Christoffel étant définis en (1.4.3)). On obtient

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \left(\frac{K}{a^2} + H^2\right)(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}) \quad , \quad R_{0\beta0\delta} = -\frac{\ddot a}{a}g_{\beta\delta} \tag{2.1.7}$$

$$G^0_0 = -3\left(\frac{K}{a^2} + H^2\right) \quad , \quad G^\alpha_\beta = -\left(\frac{2\ddot a}{a} + \frac{K}{a^2} + H^2\right)\delta^\alpha_\beta\,. \tag{2.1.8}$$

c. Cas particuliers : Espace-temps maximalement symétriques

• *Conditions de symétrie maximale*

Pour qu'un espace-temps de Robertson-Walker soit non seulement, par construction, à sections spatiales homogènes et isotropes, mais aussi maximalement symétrique (i.e. possède quatre isométries supplémentaires), il faut et il suffit que son tenseur de Riemann puisse se mettre sous la forme (2.1.2), i.e. que

$$\frac{\ddot a}{a} = \left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = K_4\,. \tag{2.1.9}$$

• M_4

Si $K_4 = 0$, l'espace-temps, plat, n'est autre que celui de Minkowski. Si l'on choisit de plus un feuilletage par des sections spatiales euclidiennes, $K = 0$, alors les conditions (2.1.9) donnent l'élément de longueur sous une forme familière (après absorption de la constante dimensionnée a dans la coordonnée r) :

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\,. \tag{2.1.10}$$

Mais si l'on choisit $K = -1$, alors $a = \bar{t}$, et l'élément de longueur prend la forme dite de *Milne*

$$ds^2 = -d\bar{t}^2 + \bar{t}^2[d\chi^2 + \sinh^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]\,. \tag{2.1.11}$$

L'espace-temps de Minkowski peut donc être vu comme un espace-temps de Robertson-Walker à sections spatiales hyperboliques et facteur d'échelle proportionnel à $\bar{t}$. Un observateur comobile n'est autre qu'un observateur inertiel issu de l'origine. Par le changement de coordonnées $t = \bar{t}\cosh\chi, r = \bar{t}\sinh\chi$, on ramène (2.1.11) à la forme précédente, ce qui montre explicitement que $\bar{t} = 0$ n'est pas un point singulier de l'espace-temps (et on constate au passage que les coordonnées de Milne ne couvrent pas tout M_4).

• *Espace-temps de de Sitter*

Si $K_4 = H^2$, l'espace-temps est dit de *de Sitter*. Plusieurs feuilletages spatiaux sont possibles :

$$\begin{aligned}
K = 0 \quad &\Longrightarrow \quad ds^2 = -dt^2 + e^{2Ht}(dx^2 + dy^2 + dz^2)\\
K = +1 \quad &\Longrightarrow \quad ds^2 = -d\bar{t}^2 + \frac{\cosh^2 H\bar{t}}{H^2}[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]\\
K = -1 \quad &\Longrightarrow \quad ds^2 = -d\tilde{t}^2 + \frac{\sinh^2 H\tilde{t}}{H^2}[d\tilde{\chi}^2 + \sinh^2\tilde{\chi}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]
\end{aligned} \tag{2.1.12}$$

(On trouvera dans, e.g. "The large structure of space-time" de Hawking et Ellis, les transformations de coordonnées qui font passer d'un feuilletage à l'autre.)

L'espace-temps de de Sitter étant maximalement symétrique, il a la géométrie d'un 4-hyperboloïde (il est non plat et non fermé) et on peut le plonger dans un espace (pseudo-euclidien) à cinq dimensions. On le visualise en supprimant deux dimensions d'espace. Les intersections du 2-hyperboloïde obtenu et de plans (paraboles, cercles ou hyperboles) représentent les sections spatiales des trois systèmes de coordonnées ci-dessus. Il est alors facile de constater que seul le feuilletage $K = +1$ couvre tout l'hyperboloïde, i.e. tout l'espace-temps de de Sitter.

Il existe enfin un autre système de coordonnées fréquemment utilisé dans lequel l'élément de longueur de de Sitter s'écrit

$$ds^2 = -(1 - \rho^2H^2)dT^2 + \frac{d\rho^2}{1 - \rho^2H^2} + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\,. \tag{2.1.13}$$

Ce système, dans lequel les composantes de la métrique ne dépendent pas du temps T, est *statique*.

Comme nous le verrons plus bas, l'espace-temps de de Sitter est souvent utilisé comme modèle simplifié d'univers, par exemple dans le cadre des théories d'inflation. C'est aussi un exemple idéal pour montrer que des éléments de longueur compliqués peuvent cacher des géométries simples et que des coefficients de métrique singuliers en certains points (e.g. (2.1.13) en $\rho = 1/H$ ou (2.1.12) en $\tilde{t} = 0$) signalent parfois une simple pathologie du système de coordonnées et non une singularité du tenseur de courbure et donc de l'espace-temps lui-même.

• *Espace-temps anti-de Sitter*

Si $K_4 = -H^2$ l'espace-temps est dit *anti-de Sitter*. Sa structure géométrique est plus complexe (il contient des lignes de genre temps fermées) mais il est actuellement populaire dans le cadre de la correspondance "CFT/AdS" en théorie des cordes.

2. Cinématique en espaces-temps de Robertson-Walker

Décider de représenter l'univers par un espace-temps de Robertson-Walker de métrique (2.1.6) s'appelle le "principe cosmologique" : la matière dans l'univers est postulée être distribuée de manière homogène et isotrope afin qu'aucun point ne soit privilégié et par conséquent ses sections spatiales doivent être maximalement symétriques.

Les points (r, θ, ϕ) constants suivent des géodésiques. Le "postulat de Weyl" stipule que les galaxies formant le "fluide cosmologique" suivent (du moins en première approximation) de telles géodésiques.

a. Le redshift des galaxies

Soit une galaxie en $r = r_g$ (et, e.g., $\theta = \pi/2, \phi = 0$) émettant des ondes lumineuses. Considérons la lumière arrivant à l'observateur en $r = 0$. Deux crêtes successives de l'onde arrivent en t_0 et $t_0 + \Delta t_0$, où Δt_0, intervalle de temps cosmique, est aussi l'intervalle de temps propre à la montre de l'observateur. La lumière a été émise par la galaxie en r_g à t_e et $t_e + \Delta t_e$. Elle a suivi une géodésique radiale nulle : $ds^2 = 0 = -dt^2 + a^2 dr^2/(1 - Kr^2)$. On a donc que $dt/a(= -dr/\sqrt{1 - Kr^2})$ est indépendant du temps et par conséquent : $\Delta t_e/a_e = \Delta t_0/a_0$, soit encore, en introduisant la fréquence de la lumière $\nu \propto \frac{1}{\Delta t}$:

$$z_e \equiv \frac{\nu_e}{\nu_o} - 1 = \frac{a_0}{a_e} - 1 \tag{2.2.1}$$

où z_e est le décalage spectral de la galaxie. Si z_e est systématiquement positif ("redshift") alors $a_e < a_0$.

Si l'on développe le facteur d'échelle en série de Taylor on a

$$z_e \simeq H_0(t_0 - t_e)\left[1 + \left(1 + \frac{1}{2}q_0\right) H_0(t_0 - t_e)\right] + \ldots \quad \text{avec} \quad H_0 \equiv \frac{\dot{a}_0}{a_0}\ ,\ q_0 \equiv -\frac{\ddot{a}_0 a_0}{\dot{a}_0^2} \tag{2.2.2}$$

H_0 est la *constante de Hubble* et q_0 le *paramètre de décélération.* Ainsi (2.2.2) relie une grandeur mesurable, le redshift, à une grandeur coordonnée, $(t_0 - t_e)$, non mesurable et qu'il s'agit de relier à une distance mesurable.

b. Distances en cosmologie

• *Distance coordonnée*

La galaxie G est repérée par ses coordonnées comobiles $r = r_g$ (et, e.g., $\theta = \pi/2, \phi = 0$). Cette distance coordonnée est un intermédiaire de calcul (tout comme une coordonnée temporelle x^0), bien adapté à l'intégration des équations géodésiques car comobile, mais n'est pas mesurable.

• *Distance propre*

On peut définir la *distance propre* D_p de la galaxie G à l'origine (où est l'observateur) à l'instant t par $ds|_t \equiv dl = a(t)\frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}}$, soit

$$D_p = a(t)\int_0^{r_g}\frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} = a(t)\begin{cases}\arcsin r_g \quad \text{si} \quad K=+1\\ r_g \quad \text{si} \quad K=0\\ \text{argsinh}\, r_g \quad \text{si} \quad K=-1\end{cases} \tag{2.2.3}$$

Cette distance serait mesurable si l'on disposait d'une règle rigide reliant la Terre à la galaxie, ce qui n'est pas le cas... On constate néanmoins que si $a(t)$ est une fonction croissante du temps, ce qui est le cas si les galaxies sont systématiquement redshiftées, alors la distance propre entre deux objets augmente avec le temps. L'univers (ou, plus justement, ses sections spatiales) est alors en expansion.

• *Distance luminosité*

Une grandeur en revanche mesurable est la *distance luminosité* définie par D_L telle que

$$l = \frac{L}{4\pi D_L^2} \tag{2.2.4}$$

où l est la luminosité apparente, mesurée, de la galaxie, et L sa luminosité absolue (supposée connue...). Cette distance luminosité peut être reliée à la distance coordonnée r_g par les considérations suivantes : la luminosité absolue est donnée par $L = N\frac{h\nu_e}{\Delta t_e} = Nh\nu_e^2$ où N est le nombre de photons émis pendant une période Δt_e ; la luminosité apparente est donnée par $l = N\frac{h\nu_o}{\Delta t_o}\frac{1}{S}$ où $S = 4\pi a_0^2 r_g^2$ est la surface de la sphère atteinte par ces photons à $t=0$ (moment où on les observe), et donc $D_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi l}} = a_0 r_g \frac{\nu_e}{\nu_0}$, soit encore, en utilisant (2.2.1)

$$D_L = a_0 r_g (1+z_e)\,. \tag{2.2.5}$$

c. La loi de Hubble

Elle relie deux grandeurs mesurables, à savoir le redshift et la distance luminosité d'une galaxie. Pour ce faire on utilise (2.2.1), (2.2.5) ainsi que l'équation de la trajectoire des photons radiaux, soit

$$\int_0^{r_g}\frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} = \int_{t_e}^{t_0}\frac{dt}{a(t)} \quad , \quad z_e = \frac{a_0}{a_e} - 1 \quad , \quad D_L = a_0 r_g (1+z_e)\,. \tag{2.2.6}$$

Si le contenu matériel de l'univers est connu, alors, comme nous le verrons plus bas, les équations d'Einstein déterminent la fonction $a(t)$. Dans ce cas la première équation ci-dessus donne $a_0 r_g$ en fonction de t_0 et t_e, la seconde donne $a_0 r_g$ en fonction de z_e et la troisième prédit la relation entre D_L et z_e. La confrontation de cette prédiction aux observations indique alors si la description du contenu matériel de l'univers était correcte ou non.

On peut aussi, à l'inverse, effectuer un développement de Taylor du facteur d'échelle : on connaît z_e en fonction de $(t_0 - t_e)$ (2.2.2) ; on connaît D_L en fonction de r_g (2.2.5) ; il faut donc relier r_g et $(t_0 - t_e)$. On utilise l'équation de la trajectoire des photons radiaux qui donne, en développant $a(t)$ et en inversant : $(t_0 - t_e) = a_0 r_g \left(1 - \frac{H_0}{2} a_0 r_g\right) + ...$ On reporte cette expression de $(t_0 - t_e)$ dans celle de z_e et on obtient : $z_e = H_0 a_0 r_g \left[1 + \frac{H_0 a_0 r_g}{2}(1 + q_0)\right] + ...$ Enfin la relation (2.2.5) donne par inversion : $r_g = \frac{D_L}{a_0}(1 - H_0 D_L) + ...$, ce qui, reporté dans l'expression de z_e conduit finalement à

$$z_e = H_0 D_L \left[1 + \frac{H_0 D_L}{2}(q_0 - 1)\right] + ... \qquad (2.2.7)$$

L'ajustement de cette relation aux observations donne en principe les dérivées temporelles successives du facteur d'échelle et permet ainsi de construire la fonction $a(t)$. Les équations d'Einstein, comme nous le verrons plus bas, fournissent alors des contraintes sur le contenu matériel de l'univers.

A l'ordre le plus bas le redshift est proportionnel à la distance luminosité : c'est la *loi de Hubble*, établie observationnellement par Hubble dans les années 30 ; ceci étant la valeur numérique de la constante de Hubble H_0 est difficile à obtenir, la définition de "chandelles standard" donnant la luminosité absolue des galaxies étant l'une des tâches les plus ardues en cosmologie observationnelle. La valeur sur laquelle les astronomes s'accordent actuellement est

$$H_0 = 100h \ km/sec/Mpc \qquad \text{avec} \qquad h \approx 0.7 \qquad (2.2.8)$$

(où $1pc = 3.26$ années-lumière). Les déviations à la linéarité donnent q_0, etc... mais on se doute que de telles mesures sont extrêmement délicates. Les observations récentes de supernovae distantes indiquent que $q_0 < 0$, soit $\ddot{a}_0 > 0$: l'expansion de l'univers serait donc actuellement accélérée.

3. Dynamique des espaces-temps de Robertson-Walker

a. Le contenu matériel de l'Univers

Les équations d'Einstein relient géométrie et matière, i.e. dans le cas présent, le facteur d'échelle $a(t)$ et les tenseurs d'énergie-impulsion des constituants matériels de l'univers. A cause de la symétrie de Robertson-Walker imposée aux modèles d'univers par le principe cosmologique, ils ne peuvent être que du type fluide parfait, donnés par (1.5.9).

Les galaxies n'interagissent que gravitationnellement et sont immobiles dans le repère comobile (2.1.6) (postulat de Weyl). Elles constituent ainsi un fluide sans pression. On considère qu'il en est de même de toute matière ordinaire ("baryonique"), gaz intergalactique, etc... Ainsi le tenseur énergie-impulsion de cette composante baryonique est $T^b_{ij} = (\rho(t)u_i u_j)^b$ avec $u^i_b = (1,0,0,0)$ (de sorte que $T^{0b}_0 = -\rho_b(t)$ et $T^b_{\alpha\beta} = T_{0\alpha} = 0$).

A ce fluide baryonique il faut semble-t-il (nous verrons plus bas pourquoi) ajouter une (large) fraction de matière non-baryonique (neutrinos massifs ? gravitinos ? axions ?...), froide, c.-à-d. non relativiste, soit encore de pression quasi-nulle, appelée *matière noire froide* ("cold dark matter") : $T^{cdm}_{ij} = (\rho(t)u_i u_j)^{cdm}$ avec $u^i_{cdm} = (1,0,0,0)$. On posera $\rho_m(t) = \rho_b(t) + \rho_{cdm}(t)$.

Il existe par ailleurs dans l'univers un fluide de radiation, dominé par le rayonnement micro-onde de fond à 2.7 degrés K, auquel on ajoute parfois un hypothétique fluide de *matière noire chaude* ("hot dark matter"). Son équation d'état est $p_{rad} = \frac{1}{3}\rho_{rad}$ de sorte que $T^{0rad}_0 = -\rho_{rad}(t)$ et $T^{\alpha rad}_\beta = \frac{1}{3}\rho_{rad}(t)\delta^\alpha_\beta$.

Des champs scalaires homogènes $\phi = \phi(t)$ ont enfin peut-être dominé l'évolution de l'univers à ses débuts (cf plus bas les scénarios d'inflation). Le tenseur énergie-impulsion d'un champ scalaire a été donné plus haut (1.5.7), et donc

$$-T^{0\Phi}_0 \equiv \rho_\Phi = \frac{1}{2}\dot\Phi^2 + V(\Phi) \quad , \quad T^{\alpha\Phi}_\beta \equiv p_\Phi \delta^\alpha_\beta = \left(\frac{1}{2}\dot\Phi^2 - V(\Phi)\right)\delta^\alpha_\beta\,. \tag{2.3.1}$$

Un champ scalaire ou fluide très particulier est la *"constante" cosmologique* dont le tenseur énergie-impulsion est

$$T^{i\Lambda}_j = -\rho_\Lambda \delta^i_j\,. \tag{2.3.2}$$

b. Les équations de Friedmann-Lemaître

Les équations d'Einstein sont $G_{ij} = 8\pi G T^{tot}_{ij}$. On a vu que pour un espace-temps de Robertson-Walker de métrique (2.1.6) les composantes du tenseur d'Einstein sont données par (2.1.8). Par ailleurs $T^0_0 = -\rho^{tot}$ et $T^\alpha_\beta = p^{tot}\delta^\alpha_\beta$. Les équations d'Einstein s'écrivent donc (Friedmann 1922)

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{tot} - \frac{K}{a^2} \qquad , \qquad \frac{\ddot a}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_{tot} + 3p_{tot}) \tag{2.3.3}$$

où, rappelons-le, $H \equiv \frac{\dot a}{a}$ et $K = \{0, +1, -1\}$ selon que les sections spatiales sont euclidiennes, sphériques ou hyperboliques.

Les équations d'Einstein, on l'a vu, contiennent les équations du mouvement de la matière en vertu de l'identité de Bianchi $D_i G^{ij} \equiv 0$. La seconde équation (2.3.3) peut donc être remplacée par $D_i T^{i0} = \partial_i T^{i0} + \Gamma^i_{ik}T^{k0} + \Gamma^0_{ik}T^{ik} = 0$ soit, en explicitant les symboles de Christoffel :

$$\dot\rho_{tot} + 3H(\rho_{tot} + p_{tot}) = 0\,. \tag{2.3.4}$$

On remarque que ces équations ressemblent fort aux équations régissant les modèles cosmologiques newtoniens vus plus haut. La seule différence est qu'en relativité la pression intervient dans les équations car elle "pèse".

Si les différents constituants de l'univers n'interagissent que gravitationnellement leurs tenseurs énergie-impulsion sont séparément conservés. Ainsi on a pour la matière (baryons plus “CDM”), la radiation et la constante cosmologique (qui mérite donc bien son nom de “constante”) :

$$\rho_m = \rho_0^m \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \quad , \quad \rho_{rad} = \rho_0^r \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \quad , \quad \rho_\Lambda = \rho_0^\Lambda \tag{2.3.5}$$

où les indices 0 indiquent la valeur actuelle des densités et du facteur d'échelle.

La dilution en $1/a^3$ de la densité de matière froide s'explique par un simple effet d'expansion volumique. La décroissance en $1/a^4$ de la densité de rayonnement provient de l'effet combiné de l'expansion et du fait que l'énergie d'un photon est proportionnelle à sa fréquence, qui décroît comme $1/a$ en raison du redshift cosmologique (2.2.1). Le rayonnement de fond étant celui d'un corps noir, la loi de Stefan stipule que sa densité d'énergie est proportionnelle à la puissance quatrième de sa température, et par conséquent

$$T \propto \frac{1}{a} \,. \tag{2.3.6}$$

Ainsi, comme le remarqua Gamow dans les années 40, tout univers en expansion contenant un fluide de radiation a été plus chaud dans le passé.

Il est devenu habituel d'introduire les *paramètres de densité* $\Omega_0^{(i)} \equiv \frac{8\pi G\rho_0^{(i)}}{3H_0^2}$ qui permettent de réécrire la première équation de Friedmann sous la forme (à condition que $H_0 \neq 0$)

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \Omega_0^m \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_0^r \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_0^\Lambda + \Omega_0^K \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \tag{2.3.7}$$

en ayant posé $\Omega_0^K \equiv -\frac{K}{H_0^2 a_0^2}$.

N.B. : Nous étudierons plus bas le rôle d'un champ scalaire primordial (d'inflation) et ignorerons celui d'un champ de “quintessence”, version dynamique d'une constante cosmologique.

4. Modèles d'univers : quelques exemples

a. Le modèle statique d'Einstein (1917)

En 1917 les galaxies et leur mouvement systématique de récession étaient inconnus (le “grand débat” sur la distance et la nature des “nébuleuses” ainsi que la loi de Hubble datent des années 30). Par ailleurs le préjugé d'un univers statique était bien ancré (les modèles cosmologiques newtoniens en expansion datent eux aussi des années 30). Enfin les problèmes d'un univers homogène et isotrope d'extension infinie étaient connus.

C'est pour de telles raisons qu'Einstein chercha une solution de ses équations, statique, homogène, isotrope et de sections spatiales sphériques (et donc de volume fini) où la matière se résume à un fluide sans pression (le rayonnement de fond à 3 degrés Kelvin ne fut découvert que dans les années 60).

Les équations (2.3.3) et (2.3.4) se réduisent alors à

$$0 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_0^m + \rho_0^\Lambda) - \frac{1}{a_0^2} \quad , \quad \rho_0^m - 3\rho_0^\Lambda = 0 \tag{2.4.1}$$

On voit que la présence d'une constante cosmologique est nécessaire pour que le système ait une solution.

L'introduction de cette nouvelle constante de la nature fut vite considérée par Einstein comme une ≪grossière erreur≫ et il l'abandonna définitivement dès que Hubble découvrit la récession des galaxies, une loi qui milite en faveur d'un univers en expansion. (Ce modèle statique fut cependant défendu jusqu'aux années 70 par les partisans de la théorie de la "lumière fatiguée" censée expliquer le redshift des galaxies par une interaction des photons et du milieu intergalactique. Mais, d'une part une telle interaction n'est pas prédite par les lois de l'électromagnétisme standard et impliquerait d'autre part une dispersion, non observée, de la lumière.)

b. Les modèles de de Sitter (1917) et de l'"état stationnaire" (1948)

De Sitter, lui, chercha à représenter l'univers par un espace-temps maximalement symétrique. Nous avons vu plus haut que les symétries supplémentaires imposées alors aux modèles de Robertson-Walker impliquaient les relations (2.1.9). Les équations de Friedmann (2.3.3) deviennent ainsi : $K_4 = \frac{8\pi G}{3}\rho^{tot}$ et $K_4 = -\frac{4\pi G}{3}(\rho^{tot} + 3p^{tot})$ et imposent que la matière se résume à une constante cosmologique : $\rho^{tot} = -p^{tot} \equiv \rho_0^\Lambda$. Ainsi donc l'univers de de Sitter est vide de matière ordinaire, courbé par la seule constante cosmologique.

Dans un tel univers les galaxies doivent être vues comme des particules test suivant des géodésiques. La question est : lesquelles ?

Dans un système de coordonnées adaptées, l'élément de longueur de l'espace-temps de de Sitter peut être mis sous la forme statique (2.1.13). Remarquons d'abord que la lumière émise par une particule ("galaxie") immobile dans ce repère en $\rho = \rho_g$ sera observée en $\rho = 0$ avec un redshift donné par (1.3.9) soit $z_e \equiv \frac{\nu_e}{\nu_r} - 1 = \sqrt{\frac{1}{1-\rho_g^2 H^2}} - 1$. Un raisonnement calqué sur celui conduisant à (2.2.5) relie la distance luminosité à ρ_g par $D_L = \rho_g(1 + z_e)$, de sorte que la "loi de Hubble" pour de telles "galaxies" est : $z_e = \sqrt{1 + D_L^2 H^2} - 1$. Elle n'est pas linéaire pour les petites distances et les "galaxies" ne suivent pas des géodésiques de l'espace-temps ; il semble pourtant que c'est ainsi que Hubble lui-même comprit sa loi dans le contexte de la relativité générale (voir son livre "The realm of nebulae"), preuve s'il en est besoin que l'interprétation d'une observation de nature cosmologique est délicate... En revanche, si les galaxies sont en chute libre radiale, on trouve, après un calcul facile de géodésique : $z_e = HD_L$; dans ce cas la loi de Hubble est strictement linéaire. Dans les deux cas le redshift des galaxies n'est pas interprété en terme d'expansion de l'univers mais de redshift gravitationnel combiné, dans le second cas, à un effet Doppler.

En 1948, Bondi, Hoyle, Gold et Narlikar postulent que les galaxies suivent les géodésiques $x^\alpha = Const.$ de l'espace-temps de de Sitter décrit dans le repère où les sections spatiales sont euclidiennes et où l'élément de longueur prend la forme $ds^2 = -dt^2 + e^{2Ht}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$, cf (2.1.12). Le facteur d'échelle est $a(t) = e^{Ht}$ et le redshift observé des galaxies est interprété comme une expansion des sections spatiales. On prédit alors de (2.2.6) la relation redshift-luminosité suivante

$$z_e = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 4HD_L} - 1\right) . \tag{2.4.2}$$

La comparaison à (2.2.7) identifie la constante H à celle de Hubble et le paramètre de décélération est prédit valoir $q_0 = -1$.

Dans un tel modèle les galaxies, a priori, se dispersent. De façon à décrire un Univers dans un état stationnaire, c.-à-d. globalement identique à lui-même au cours du temps t, Bondi et al. proposèrent un phénomène de création continue de matière, chargée de compenser la dispersion du flot géodésique de galaxies—une idée a priori pas plus choquante que celle de création de toute la matière lors d'un "Big-Bang", ex nihilo elle aussi, imposée par le modèle "standard" (voir plus bas).

Ce modèle fut cependant abandonné dans les années 60 avec la découverte par Penzias et Wilson du rayonnement de fond à 3 degrés Kelvin, forte indication que l'univers a été plus chaud dans le passé, qu'il a donc une histoire et n'est donc pas dans un état stationnaire.

c. Le modèle standard du Big-Bang chaud

Dans ce modèle, qui sert depuis les années 60 de cadre à la cosmologie observationnelle, la croissance du facteur d'échelle est régie par les équations (2.3.3) à (2.3.6). On voit ainsi sur (2.3.6) que pour les $a(t)$ suffisamment petits, c'est la densité de radiation qui gouverne l'évolution de l'univers et le facteur d'échelle croît en $t^{\frac{1}{2}}$. En $t = 0$, densités d'énergie et tenseur de courbure divergent : c'est le *Big-Bang*, singularité de l'espace-temps où les équations d'Einstein ne sont plus valables. Ce Big-Bang de plus fut "chaud" car la température de la radiation, inversement proportionnelle par (2.3.6) au facteur d'échelle, y devient infinie.

Ensuite la matière domine et (si le terme de courbure peut être ignoré) le facteur d'échelle croît en $t^{\frac{2}{3}}$. L'évolution ultime de l'univers dépend de la présence ou non de la constante cosmologique et de la courbure des sections spatiales. Pour $\Omega_0^\Lambda = 0$ et $\Omega_0^K < 0$ ($K = +1$) par exemple, l'univers après sa période d'expansion s'effondrera sur lui-même. En revanche, pour $\Omega_0^\Lambda > 0$ l'Univers tend asymptotiquement vers un espace-temps de de Sitter.

Les valeurs des paramètres de densité $\Omega_0^{(i)}$ sont dérivés d'observations astronomiques. L'équation (2.3.6) détermine seulement leur somme

$$1 = \Omega_0^m + \Omega_0^{rad} + \Omega_0^\Lambda + \Omega_0^K \,. \tag{2.4.3}$$

Quant à la seconde équation de Friedmann (2.3.3) elle donne

$$2q_0 = \Omega_0^m + 2\Omega_0^{rad} - 2\Omega_0^\Lambda \,. \tag{2.4.4}$$

Si la densité de radiation est dominée par le rayonnement de corps noir du fond microonde (i.e. si, comme on le pense, la "matière sombre chaude" est négligeable), alors sa température ($T_0 = 2.7$ degrés K) et la loi de Stefan ($\rho_0^{rad} = \sigma T_0^4$) montrent qu'elle est actuellement négligeable :

$$\Omega_0^{rad} \approx 10^{-4} \,. \tag{2.4.5}$$

Dans les années 90, aucun besoin de constante cosmologique ne s'étant fait sentir, les deux équations (2.4.3) et (2.4.4) se résumaient alors à : $1 = \Omega_0^m + \Omega_0^K$ et $2q_0 = \Omega_0^m$. Supposer en plus des sections spatiales quasi-euclidiennes (en accord avec les prédictions des modèles d'inflation, voir plus bas) conduisait alors à $\Omega_0^m = 1$, en désaccord avec les observations de courbes de rotation des galaxies par exemple, qui indiquaient plutôt : $\Omega_0^m = 0.3$. Pour que Ω_0^m ait cette dernière valeur, les sections spatiales de l'univers devaient être hyperboliques ($\Omega_0^K = 0.7 \Rightarrow K = -1$) (d'où la construction de modèles d'inflation "ouverte").

La situation a changé dramatiquement ces toutes dernières années. Tout d'abord les mesures des anisotropies du rayonnement de fond (en particulier la position du premier "pic Doppler") indiquent que

$$\Omega_0^m + \Omega_0^\Lambda \approx 1 \tag{2.4.5}$$

ce qui implique via (2.4.3) et (2.4.5) $\Omega_0^K \approx 0$, en accord avec les modèles d'inflation standard. Par ailleurs les observations récentes de supernovae lointaines indiquent que $q_0 < 0$. La présence d'une constante cosmologique (ou d'un champ de "quintessence", qui en est une version dynamique) semble donc s'imposer.

Soyons plus précis : les observations de supernovae ne mesurent pas directement q_0, le développement limité (2.2.7) manquant de précision pour les redshifts mesurés (de l'ordre de 0.5-0.7). On utilise plutôt les expressions exactes (2.2.6) en y exprimant dt en fonction de da à partir de (2.3.6). Si l'on pose $\Omega_0^{rad} = 0$, on a alors, en tenant compte de (2.4.3)

$$H_0 D_L = (1+z_e)\int_0^{z_e} \frac{dz}{\sqrt{1+(2+\Omega_0^m - 2\Omega_0^\Lambda)z + (1+2\Omega_0^m - \Omega_0^\Lambda)z^2 + \Omega_0^m z^3}} \tag{2.4.6}$$

(ce qui redonne bien (2.2.7) au premier ordre, en utilisant (2.4.4)). Dans la zone de redshifts balayée ($z \approx [0.5 - 0.7]$) et pour les valeurs pressenties de Ω_0^m etΩ_0^Λ (≈ 0.3 et ≈ 0.7) les termes en z et z^2 sont comparables et l'intégrale s'avère dépendre grosso modo de $\Omega_0^\Lambda - \Omega_0^m$; l'ajustement aux observations donne

$$\Omega_0^\Lambda - \Omega_0^m \approx 0.4\,. \tag{2.4.7}$$

Enfin, la valeur $\Omega_0^m = 0.3$ obtenue par les courbes de rotation de galaxies (entre autres) se confirme. On arrive donc à un faisceau d'observations indépendantes se recoupant pour donner

$$\Omega_0^{rad} \simeq 0 \quad , \quad \Omega_0^m \simeq 0.3 \quad , \quad \Omega_0^K \simeq 0 \qquad , \quad \Omega_0^\Lambda \simeq 0.7\,. \tag{2.4.8}$$

Il reste à évaluer la contribution de la matière ordinaire, baryonique, à Ω_0^m. La méthode la plus fiable est de mesurer les proportions (relatives à l'Hydrogène) des éléments légers (Hélium, Lithium,...) présents dans l'univers. En effet ces éléments (comme le montrèrent Gamow, Bethe, Hoyle,...) ne sont pas produits dans les étoiles comme les éléments plus lourds, mais au début de l'histoire de l'univers, lors de la *nucléosynthèse primordiale*, époque où la température était suffisamment élevée pour les produire. Les proportions produites résultent d'un équilibre entre le taux d'expansion de l'univers et la densité de protons présents. On arrive ainsi à

$$\Omega_0^b h^2 \approx 2\times 10^{-2} \qquad \text{soit} \qquad \Omega_0^b \approx 0.04\,. \tag{2.4.9}$$

...Les résultats (2.4.5), (2.4.8) et (2.4.9) sont pour le moins surprenants : l'évolution de l'univers serait gouvernée non, comme on le croyait jusqu'aux années 80, par la matière ordinaire, connue en laboratoire, mais par un mélange de "matière noire froide" de nature inconnue et de constante cosmologique dont les seules valeurs "naturelles" sont, soit strictement zéro comme le prônait Einstein, soit, si c'est une "énergie du vide", $\rho_\Lambda \simeq \rho_{Planck}$, ce qui, par l'équation de Friedmann (2.3.3), est incompatible par plus de 120 ordres de grandeur avec la valeur mesurée de la constante de Hubble (2.2.8)...

III. Modèles d'inflation : un aperçu

1. Quelques questions sans réponse dans le modèle standard

a. Le problème de la platitude de l'espace

L'équation de Friedmann (2.3.3) s'écrit aussi sous la forme

$$\Omega - 1 = \frac{K}{(aH)^2} \quad \Longleftrightarrow \quad \Omega - 1 = (\Omega - 1)_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{2(1-p)/p} \tag{3.1.1}$$

où $\Omega \equiv \rho_{tot}/\rho_{crit}$, $\rho_{crit} \equiv 3H^2/8\pi G$, et où dans la seconde équation on a pris $a \propto t^p$ et utilisé $aT = Const.$ On voit ainsi que $\Omega - 1$ croît avec le temps si $p < 1$, ce qui est le cas, et que pour être de l'ordre de un aujourd'hui (ce qui est le cas : la géométrie des sections spatiales de l'univers est remarquablement plate), il a fallu qu'il soit TRÈS proche de 1 dans le passé (à environ 10^{60} près au temps de Planck où la température a dû valoir 10^{32} degrés Kelvin).

b. Le problème de l'horizon

La distance propre (ou "horizon des particules") parcourue depuis le Big-Bang par un photon, et donc par tout phénomène causal, est finie si $a \propto t^p, p < 1$ ce qui est le cas si l'évolution de l'univers a été dominée par de la poussière ou de la radiation (pour $K = 0$). On a en effet $ds^2 = 0$ donc, au moment par exemple du découplage radiation-matière : $l_p = a\int_0^t a^{-1}dt = 2t = 2t_{dec}(T_{dec}/T)^2$ si l'univers est encore dominé par la radiation ($a \propto t^{1/2}$). Une application numérique simple (et un peu de trigonométrie) donne alors que des régions du ciel de plus de 10 degrés carré environ ne pouvaient pas être en contact causal au moment du découplage et ne devraient donc pas a priori avoir les mêmes propriétés. Or le rayonnement de fond à 3 degrés K est isotrope sur tout le ciel à mieux de 10^{-5} près et ses fluctuations ont partout les mêmes propriétés statistiques. Ainsi on ne peut, dans le cadre du modèle standard, que postuler l'homogénéité et l'isotropie des sections spatiales, on ne peut espérer les expliquer.

c. Le problème de la formation des structures

C'est une autre façon de poser le problème de l'horizon. Le rayon de l'horizon des particules est $l_p = t/(1-p)$ si le facteur d'échelle croît en t^p, $p < 1$; le rayon de Hubble qui caractérise l'échelle des distances cosmologiques est lui aussi proportionnel au temps cosmique : $l_H \equiv 1/H = a/\dot{a} = t/p$. La taille propre d'une structure de taille comobile fixe croît en revanche comme le facteur d'échelle, en t^p. On voit donc que suffisamment tôt dans l'histoire de l'univers toute structure a eu une taille supérieure à celle de l'horizon ou du rayon de Hubble. Elle n'a donc pu être générée par des processus causaux. Par conséquent il est impossible, dans le cadre du modèle standard, d'expliquer le spectre des perturbations éventuellement à l'origine des grandes structures, galaxies et amas de galaxies observées : il faut le postuler.

d. Le problème des monopôles

Les théories actuelles d'unification des interactions sont pour la plupart des théories de jauge dans lesquelles un champ scalaire ϕ, dit de Higgs, brise la symétrie de l'interaction en sautant par effet tunnel à une valeur, non nulle, d'énergie minimale. Ce phénomène est dû au fait que le potentiel, de quadratique, devient quartique (en forme de "chapeau mexicain") au moment où la température chute en dessous de la température d'unification. Le saut de ϕ de sa valeur nulle de "faux vide" vers le "vrai vide" d'énergie minimale étant quantique, sa valeur finale est aléatoire. On conçoit que dans des régions causalement disconnectées ces valeurs soient différentes. Le raccordement de ϕ aux frontières de tels domaines implique l'existence de "défauts topologiques" où ϕ, localement, possède sa valeur de faux vide. Dans le cas simple où ϕ est un champ réel ces défauts sont des "murs", i.e. des objets bi-dimensionnels ; dans le cas où il est complexe, ce sont des filaments unidimensionnels ou "cordes cosmiques" ; enfin ce sont des objets ponctuels ou "monopôles" pour des groupes de jauge plus élaborés. Or la température critique des théories grand-unifiées des interactions électrofaible et forte est estimée valoir entre 10^{14} et 10^{16} GeV. Lorsque, peu de temps après le Big-Bang (à $t \approx 10^{-35}$ sec) l'univers avait cette température, des défauts topologiques ont donc dû se former copieusement, la taille de l'horizon à cette époque étant de l'ordre de $10^{-24} cm$. Les cordes cosmiques, qui ont une dynamique complexe, rayonnent de l'énergie sous forme d'ondes gravitationnelles et pour la plupart disparaissent. Les monopôles en revanche sont stables et bien qu'ils se diluent en a^{-3} leur densité actuelle devrait être de 10^{13} fois la densité critique ! De deux choses l'une donc : ou les théories grand-unifiées ou le modèle standard du Big-Bang chaud sont à mettre au rebut.

2. La réponse inflatoire

a. Changer l'équation d'état de la matière primordiale

Toutes ces questions laissées sans réponse dans le cadre du modèle standard viennent du fait que le facteur d'échelle croît comme t^p, $p < 1$ près du Big-Bang. Supposons donc que l'univers ait connu une brève période d'expansion très brutale, appelée d'inflation, dans son passé reculé : $a \propto t^q$, avec $q \gg 1$, voire $a \propto e^{Ht}$.

Le problème de la platitude est alors résolu. En effet, dans le cas d'une croissance exponentielle par exemple :

$$\frac{\Omega_f - 1}{\Omega_d - 1} = \left[\frac{(aH)_d}{(aH)_f}\right] = \frac{a_d}{a_f} = e^{-2H(t_f - t_d)} \qquad (3.2.1)$$

où les indices f et d se réfèrent à la fin et au début de la période inflatoire, et $\Omega = 1$, qui correspond à $\rho = \rho_{crit}$ et donc à une géométrie spatiale euclidienne, de répulseur devient un attracteur. En fait les modèles d'inflation génériquement *prédisent* $\rho = \rho_{crit}$ à une extraordinaire précision, en accord avec les observations récentes des anisotropies du rayonnement de fond qui indiquent, comme nous l'avons vu, que $\Omega_0^K \approx 0$. La métrique pendant la période d'inflation est avec grande précision : $ds^2 = -dt^2 + e^{2Ht}d\vec{x}^2$, qui n'est autre que la métrique de de Sitter. Pendant l'inflation l'espace-temps est donc quasiment à symétrie maximale.

Les modèles d'inflation résolvent aussi le problème de l'origine des structures. Puisque le rayon de Hubble est constant pendant la période quasi-de Sitter d'inflation une structure aujourd'hui disons de la taille d'un amas de galaxies peut facilement avoir été à l'intérieur du rayon de Hubble en début d'inflation. (Le problème de causalité étant résolu, il reste bien sûr à fournir un mécanisme précis—voir plus bas.)

De même ils résolvent le problème de l'horizon. Dans le modèle standard d'une époque dominée par le rayonnement suivie par une époque où la pression est nulle, la taille de l'horizon des particules est (en temps conforme et pour $K = 0$) : $\eta_0 = 2H_0^{-1} - H_0^{-1}(1 + z_{trans})$ où $z_{trans} = a_0/a_{trans} \approx 10^3$ est le redshift de la surface de transition. Par conséquent $(\eta_0 - \eta_{trans})/\eta_0 \approx 2z_{eq} \gg 1$ et deux régions diamétralement opposées sur le ciel ne peuvent pas avoir été en contact causal au moment de la transition. Si maintenant l'univers a subi une période d'inflation exponentielle, un calcul analogue conduit à : $\eta_0 = 2H_0^{-1} - H_0^{-1}(1 + z_{trans}) + z_{infl}\, z_{trans}^{1/4}/\sqrt{H_0 H_{infl}}$ où $z_{infl} = a_f/a_d$ est exponentiellement grand. Pour résoudre le problème de l'horizon il "suffit" donc (pour $z_{trans} \approx 10^3$ et $T_e \approx 10^{14}$ GeV) que $z_{infl} \approx 10^{26} \approx e^{60}$, ce que les modèles atteignent aisèment.

b. Le rôle d'un champ scalaire

Quel type de matière peut causer une telle période d'inflation ? Ce ne peut être de la matière ordinaire car pour que le facteur d'échelle croisse en t^q avec $q > 1$ il faut que $\rho + 3p < 0$, cf (2.3.3). Mais si l'évolution de l'univers pendant l'inflation est gouvernée par un champ scalaire de tenseur énergie-impulsion donné par (1.5.7) alors les équations de Friedmann (pour $K = 0$) deviennent, cf (2.3.1) et (2.3.3) :

$$\begin{aligned} 3H^2 &= 8\pi G\left(\frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + V(\Phi) + \rho_{rad}\right) \\ \ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} &+ \frac{dV}{d\Phi} = 0. \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

On voit que si, primo, la densité d'énergie du champ scalaire se met à l'emporter sur la densité de matière ordinaire (rayonnement) et que, secondo, $\dot{\Phi} \approx 0$ pendant cette période, alors : $H^2 \approx 8\pi GV/3 \approx Const$ et le facteur d'échelle croît exponentiellement, comme souhaité.

Il faut à ce stade pouvoir proposer un candidat plausible pour ce champ scalaire. En 1981 Alan Guth proposa que ce soit le champ de Higgs des théories grand-unifiées, celui-là même qui, dans le scénario standard, est à l'origine du problème des monopôles. Malheureusement ce scénario de "vieille inflation" n'est pas viable (il conduit à un univers beaucoup trop inhomogène). De nombreux autres scénarios ont été proposés depuis, aucun n'a encore fait l'unanimité.

c. L'inflation "chaotique" (Linde 1983)

Les champs scalaires issus de théories grand-unifiées ou de supercordes n'ayant conduit qu'à des scénarios bancals, Linde en 1983 proposa de *postuler* (en tous cas pour l'heure) l'existence d'un champ scalaire, appelé inflaton, le plus simple, à savoir libre et massif. Les équations d'évolution de l'univers primordial lorsqu'il est régi par ce champ sont alors simplement

$$3H^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad , \quad \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad , \quad V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{3.2.3}$$

(où on a absorbé le facteur $8\pi G$ dans une redéfinition du champ). Il est facile de voir que si, initialement, $\phi \gg 1$ la solution approchée de ces équations est

$$\ddot{\phi} \simeq 0 \quad , \quad \dot{\phi} \simeq -\sqrt{\frac{2}{3}}m \quad , \quad H \simeq \frac{m\phi}{\sqrt{6}} \qquad (\phi \gg 1) \tag{3.2.4}$$

ce qui implique une expansion quasi-exponentielle du facteur d'échelle, qui résout les problèmes d'horizon, platitude, etc... énumérés plus haut.

A la fin de cette période de "roulement lent", le champ scalaire oscille au fond de son puits de potentiel et la solution approchée de (3.2.3) devient

$$\phi \simeq 2\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{\sin mt}{mt} \quad , \quad H \simeq \frac{2}{3t} \qquad (\phi \simeq 0) \tag{3.2.5}$$

de sorte que le facteur d'échelle croît en moyenne en $t^{2/3}$, comme si l'univers était dominé par un fluide sans pression.

Le problème de ce scénario (comme de tout autre scénario d'inflation) est alors celui de s'en "sortir élégamment", c.-à-d. de proposer un mécanisme de conversion du champ ϕ en fluide de radiation, afin de raccorder cette évolution inflatoire primordiale au scénario standard dominé par le mélange (2.4.8) de radiation, matière froide et constante cosmologique (ou champ de quintessence). La nature de l'inflaton étant inconnue, ses couplages à la matière sont calqués sur ceux dont on a l'habitude en théorie des champs, par exemple en $\phi^2\psi^2$ où ψ symbolise la matière ordinaire. L'équation de Klein-Gordon du mouvement de ψ s'avère alors être de la classe des équations différentielles de Matthieu dont les solutions s'interprètent comme des productions de bouffées de particules ψ. Cette période de "préchauffage" doit se poursuivre par une période de thermalisation, dont les mécanismes sont encore mal compris.

Bien sûr ce scénario de base peut être raffiné à l'envi. Les potentiels peuvent être plus complexes, on peut introduire plusieurs inflatons, etc...

d. Origine quantique des fluctuations de densité

Jusqu'à présent nous nous sommes bornés à décrire l'univers comme strictement homogène et isotrope. Bien sûr ce n'est qu'une approximation : des anisotropies de l'ordre de 10^{-5} sont mesurées depuis le début des années 90 dans le rayonnement de fond à 3 degrés K et les grandes structures de l'univers, galaxies et amas de galaxies, sont très probablement le résultat de l'effondrement gravitationnel de petites fluctuations initiales de densité.

Comme nous l'avons mentionné plus haut, le scénario standard du Big-Bang chaud, où l'univers est dominé à ses débuts par un fluide de radiation, ne peut fournir une origine à ces fluctuations primordiales, du fait du problème de l'horizon. Les scénarios d'inflation, en résolvant ce problème, procurent un cadre dans lequel traiter la question.

• *Perturber la métrique*

L'élément de longueur d'un univers de Robertson-Walker perturbé peut s'écrire sous la forme (nous nous limiterons ici au cas $K = 0$)

$$ds^2 = a^2(\eta)[-(1+2A)dt^2 + 2B_\alpha dt dx^\alpha + (\delta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta})dx^\alpha dx^\beta] \tag{3.2.6}$$

et les perturbations peuvent se décomposer selon

$$B_\alpha = \partial_\alpha B + \bar{B}_\alpha \quad , \quad h_{\alpha\beta} = 2C\delta_{\alpha\beta} + 2\partial^2_{\alpha\beta}E + 2\partial_{(\alpha}\bar{E}_{\beta)} + \bar{h}_{\alpha\beta} \tag{3.2.7}$$

où les tri-vecteurs $\bar{B}^\alpha$ et $\bar{E}^\alpha$ sont à divergence nulle ainsi que le tenseur $\bar{h}_{\alpha\beta}$ qui, de plus est sans trace. Ainsi les perturbations de la métrique se divisent en quatre perturbations "scalaires" (A, C, B, E), quatre perturbations "vectorielles" (les quatre composantes indépendantes des deux vecteurs sans divergence $\bar{B}^\alpha$ et $\bar{E}^\alpha$), et deux perturbations "tensorielles" $(\bar{h}_{\alpha\beta})$, soit dix composantes en tout, comme il se doit.

L'intérêt de cette décomposition est que les équations d'Einstein se séparent alors en trois groupes indépendants. Nous nous limiterons dorénavant aux perturbations scalaires (dans le scénario d'inflation chaotique il s'avère que les perturbations vectorielles sont négligeables et les perturbations tensorielles sous-dominantes).

Le choix du repère étant libre en relativité générale (ce qui s'interprète dans ce cadre linéarisé comme une liberté de jauge), quatre de ces perturbations peuvent être choisies arbitrairement. Nous choisirons la jauge dite longitudinale (ou newtonienne), à savoir

$$B = E = \bar{B}_\alpha = 0 \tag{3.2.8}$$

de sorte que l'élément de longueur (3.2.6) pour les perturbations scalaires se réduit à

$$ds^2 = a^2(\eta)[-(1+2A)dt^2 + \delta_{\alpha\beta}(1+2C)dx^\alpha dx^\beta]\,. \tag{3.2.9}$$

• *Les équations d'Einstein pour les perturbations*

C'est un exercice facile de calculer au premier ordre le tenseur d'Einstein pour la métrique (3.2.9). Quant au membre de droite des équations d'Einstein c'est le tenseur énergie-impulsion de l'inflaton, calculé lui-aussi au premier ordre en $\delta\phi$. On obtient deux équations de contraintes

$$A = -C \quad , \quad \frac{1}{2}\phi'\delta\phi = A + HA \tag{3.2.10}$$

où un prime dénote la dérivation par rapport au temps conforme η (tel que $ad\eta = dt$), et une équation d'évolution pour le mode k de Fourier de A :

$$u'' + \left(k^2 - \frac{w''}{w}\right) u = 0 \quad \text{où} \quad u \equiv \frac{2a}{\phi'} A \quad \text{et} \quad w \equiv \frac{H}{a\dot{\phi}} . \tag{3.2.11}$$

(Cette équation est l'analogue relativiste de l'équation newtonienne (1.2.5).)

L'évolution qualitative des perturbations est alors la suivante : au début de l'inflation le terme $\frac{w''}{w}$ (dont on connaît l'expression explicite en fonction du temps via (3.2.4)) est négligeable, pour tout k correspondant à une taille de structure d'intérêt aujourd'hui. Les perturbations oscillent donc. Puis, l'expansion étant toujours quasi-exponentielle, elles "sortent du rayon de Hubble" (k^2 devient négligeable devant $\frac{w''}{w}$) et $u \simeq C_d w + C_c w \int \frac{d\eta}{w^2} \to C_c w \int \frac{d\eta}{w^2} \approx Const.$, le premier terme devenant vite négligeable. Arrive la fin de l'inflation où l'expansion de l'univers de quasi-exponentielle, devient $\propto t^{\frac{2}{3}}$, cf (3.2.5). Comme (3.2.11) possède, pour $k = 0$, l'intégrale première $w^2(u/w)' = Const.$, il est facile de relier l'amplitude de la perturbation u lorsque qu'elle entre à nouveau dans le rayon de Hubble à son amplitude en début d'inflation et de constater une énorme amplification, $\propto \frac{H^2}{\dot{\phi}^2}|_{inf} \gg 1$, cf (3.2.4).

• *Quantification des perturbations*

Il reste à déterminer l'amplitude initiale des perturbations. La nature exacte de l'inflaton est inconnue mais on pense que c'est un champ fondamental d'une théorie grand-unifiée encore à naître. Il est donc quantique et on le décompose en deux morceaux : un "mode zéro", $\phi(t)$, considéré comme une moyenne classique dont le tenseur énergie-impulsion régit les équations (non quantiques) d'Einstein ; et une fluctuation $\delta\phi$ qui, elle, peut être considérée comme un champ quantique libre se propageant dans un espace de Robertson-Walker.

La quantification de ce champ suit la procédure standard : on le décompose en modes de Fourier dont les coefficients sont transformés en opérateurs obéissant aux lois habituelles de commutation des opérateurs de création et d'annihilation de l'oscillateur harmonique. Il faut ensuite choisir l'état quantique du champ. Le plus simple et le plus naturel est de supposer qu'il est dans l'état du vide, i.e. que chaque mode de Fourier est dans l'état fondamental de l'oscillateur harmonique. Ceci fixe comme on sait la normalisation des modes. Le spectre des fluctuations ($<0|\hat{\delta}\phi_{k'}\hat{\delta}\phi_k|0>$) est ainsi connu et identifié au spectre des fluctuations classiques, considérées comme des variables aléatoires.

• *Résultat*

Ainsi donc, dans les modèles d'inflation, les fluctuations du vide quantique en début d'inflation se transforment, via leurs relations aux perturbations de la métrique (3.2.10), en perturbations de densité de la matière, lorsque celles-ci se couplent à la métrique, après la période d'inflation, au travers des équations d'Einstein. L'amplitude et le spectre de ces fluctuations, au moment où elles entrent à nouveau dans le rayon de Hubble, sont complètement déterminés : c'est grosso modo un spectre sans échelle (dû au fait que la période d'inflation est quasi-de Sitter donc sans échelle privilégiée) et d'amplitude $\approx m \approx 10^{-5}$ pour une masse de l'inflaton de l'ordre de 10^{14} GeV.

Il est à partir de cela possible de calculer le spectre des anisotropies du rayonnement de fond à 3 degrés K et le fait que les prédictions ont été jusqu'à présent confirmées par les observations (COBE, BOOMERANG, ARCHEOPS, etc...) est un remarquable succès au crédit des modèles d'inflation.

Bibliographie sommaire

- Lev N. Landau, Evgueni M. Lifchitz, *Théorie des Champs*, Mir, 1989
- Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley, 1972
- A. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, Harwood Acad. Publ., 1990
- V.F. Mukhanov, H.A. Feldman and R.H. Brandenberger, Phys. Rep. **215**, 203, 1992